贝塞尔函数

斐哥课堂+ Phaedo Classes 数学物理方程 不挂科 第4讲

4大模块

2道题目

贝塞尔函数

模块1 / 贝塞尔方程的引出

模块2 / 贝塞尔方程的通解

模块3 / 贝塞尔函数的递推公式

模块4 / 函数展开成贝塞尔函数的级数

贝塞尔方程的引出

小节1 / 贝塞尔方程的引出

贝塞尔方程的引出

我们以圆盘的瞬时温度为例推导贝塞尔方程。

设有半径为R的薄圆盘，其侧面绝缘，若圆盘边界上的温度保持为0摄氏度，且初始温度已知，求圆盘内的瞬时温度分布规律。这个问题就可以归结为以下定解问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \quad x^2 + y^2 < R^2 \\ u\Big|_{t=0} = \varphi(x,y) \ , x^2 + y^2 \le R^2 \\ u\Big|_{x^2+y^2=R^2} = 0 \end{cases}$$

我们用分离变量法求解这个问题

设 $u(x,y,t) = V(x,y)T(t)$，代入方程得：$VT' = a^2\left(\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)T$

贝塞尔方程的引出

$$VT' = a^2\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)T$$

整理可得 $\dfrac{T'}{a^2T} = \dfrac{\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)}{V} = -\lambda \quad (\lambda > 0)$

从而得到一组方程 $T'(t) + a^2\lambda T(t) = 0 \qquad \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \lambda V = 0$

$$T'(t) + a^2\lambda T(t) = 0 \quad \Longrightarrow \quad T(t) = Ae^{-a^2\lambda t}$$

$\boxed{\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \lambda V = 0}$ 亥姆霍兹方程

贝塞尔方程的引出

求解亥姆霍兹方程满足条件 $V\Big|_{x^2+y^2=R^2}=0$ 的非零解

我们引用平面上的极坐标系，将亥姆霍兹方程转化为极坐标形式，可得

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 V}{\partial \rho^2}+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial V}{\partial \rho}+\dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}+\lambda V=0, \quad \rho<R,\ 0\le\theta\le 2\pi \\ V\Big|_{\rho=R}=0, \quad 0\le\theta\le 2\pi \end{cases}$$

再令 $V(\rho,\theta)=P(\rho)\Theta(\theta)$，代入方程并分离变量，可得 $\Theta P''+\dfrac{1}{\rho}\Theta P'+\dfrac{1}{\rho^2}\Theta''P+\lambda P\Theta=0,$

$$\frac{\rho^2P''+\rho P'+\lambda\rho^2P}{P}=-\frac{\Theta''}{\Theta}=\mu \quad\Longrightarrow\quad \begin{array}{l} \rho^2P''+\rho P'+(\lambda\rho^2-\mu)P=0 \\ \Theta''+\mu\Theta=0 \end{array}$$

由于$u(x,y,t)$是单值函数，因此 $V(x,y)$是单值函数，因此 $\Theta(\theta)$应该是以2π为周期的周期函数

贝塞尔方程的引出

那么要求 μ 为以下数：$0,1^2,2^2,\cdots,n^2$，对应于 $\mu_n = n^2$

$$\Theta'' + \mu\Theta = 0 \longrightarrow \begin{cases} \Theta_0(\theta) = \dfrac{a_0}{2} \\ \Theta_n(\theta) = a_n\cos n\theta + b_n\sin n\theta \quad n = 1,2,\cdots \end{cases}$$

$$\rho^2P'' + \rho P' + (\lambda\rho^2 - n^2)P = 0 \longrightarrow \boxed{\rho^2P''(\rho) + \rho P'(\rho) + (\lambda\rho^2 - n^2)P(\rho) = 0}$$

n阶贝塞尔方程

若再做代换 $r = \sqrt{\lambda}\rho$，并且令 $F(r) = P(\frac{r}{\sqrt{\lambda}})$，则可得到 $\boxed{r^2F''(r) + rF'(r) + (r^2 - n^2)F(r) = 0}$

n阶贝塞尔方程的常用形式

根据 $V\big|_{\rho=R} = 0,\quad 0 \le \theta \le 2\pi$，以及温度是有限的，我们可得 $P(R) = 0$，$|P(0)| < +\infty$

因此，原定解问题就归结为求解贝塞尔方程在条件$P(R) = 0$，$|P(0)| < +\infty$ 的特征值与特征函数。

贝塞尔方程的引出「本节小结」

- 贝塞尔方程引出的背景是求解亥姆霍兹方程的非零解，方法是分离变量法

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial V}{\partial \rho} + \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \lambda V = 0, \quad \rho < R,\ 0 \le \theta \le 2\pi \\ V\Big|_{\rho=R} = 0, \quad 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$$

- n阶贝塞尔方程

$$\rho^2 P''(\rho) + \rho P'(\rho) + (\lambda\rho^2 - n^2)P(\rho) = 0$$

$$r^2 F''(r) + rF'(r) + (r^2 - n^2)F(r) = 0$$

贝塞尔方程的通解

小节1 / 贝塞尔方程的通解

贝塞尔函数的通解

给出n阶贝塞尔方程 $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+x\dfrac{dy}{dx}+(x^2-n^2)y=0$

在求解贝塞尔方程的过程中，我们省略具体的推导过程，并取n为正实数；

可以推导得出方程的一个特解为 $y_1=\displaystyle\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(-1)^m}{2^{n+2m}m!\Gamma(n+m+1)}x^{n+2m}\quad(n\geq 0)$

根据达朗贝尔判别法，可以判定这个级数在整个数轴上收敛，那么这个无穷级数所确定的函数

被称为n阶第一类贝塞尔函数，记作

$$\boxed{J_n(x)=\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(-1)^m}{2^{n+2m}m!\Gamma(n+m+1)}x^{n+2m}\quad(n\geq 0)}$$

即n阶第一类贝塞尔函数为贝塞尔方程的一个特解。

贝塞尔函数的通解

通过分析我们可以知道 $J_{-n}(x)=\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(-1)^m}{2^{-n+2m}m!\Gamma(-n+m+1)}x^{-n+2m}$ 也为方程的特解。

当n不为整数时，两个特解 $J_n(x)$与$J_{-n}(x)$线性无关，因此贝塞尔方程的通解结构为 $y=AJ_n(x)+BJ_{-n}(x)$

当n不为整数时，定义**第二类贝塞尔函数** $Y_n(x)=\frac{J_n(x)\cos n\pi-J_{-n}(x)}{\sin n\pi}$

这个函数是贝塞尔方程的一个特解，且与$J_n(x)$线性无关，因此方程通解的结构为 $y=AJ_n(x)+BY_n(x)$

也就是说，当n不为整数时，贝塞尔方程通解的结构有两种：

$$y=AJ_n(x)+BJ_{-n}(x) \qquad\qquad y=AJ_n(x)+BY_n(x)$$

贝塞尔函数的通解

当n为整数时，两个特解 $J_n(x)$与$J_{-n}(x)$线性相关，因此贝塞尔方程的通解结构不再是$y = AJ_n(x) + BJ_{-n}(x)$

在此情形下，我们修正第二类贝塞尔函数定义 $Y_n(x) = \lim_{\alpha \to n} \dfrac{J_\alpha(x)\cos\alpha\pi - J_{-\alpha}(x)}{\sin\alpha\pi}$ （n为整数）

这个函数是贝塞尔方程的一个特解，且与$J_n(x)$线性无关，因此方程通解的结构为 $y = AJ_n(x) + BY_n(x)$

（因为当$x = 0$时，$J_n(x)$为有限值，$Y_n(x)$为无穷大）

综上所述，不论n是否为整数，贝塞尔方程 $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + x\dfrac{dy}{dx} + (x^2 - n^2)y = 0$ **的通解均可以表示为**

$y = AJ_n(x) + BY_n(x)$　　A，B为任意常数，n为任意实数

贝塞尔函数的通解「本节小结」

- **n阶第一类贝塞尔函数**

$$J_n(x)=\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(-1)^m}{2^{n+2m}m!\Gamma(n+m+1)}x^{n+2m}\quad(n\geq 0)$$

- **第二类贝塞尔函数**

$$Y_n(x)=\frac{J_n(x)\cos n\pi-J_{-n}(x)}{\sin n\pi}$$ （n不为整数）

$$Y_n(x)=\lim_{\alpha\to n}\frac{J_\alpha(x)\cos\alpha\pi-J_{-\alpha}(x)}{\sin\alpha\pi}$$ （n为整数）

- **贝塞尔方程的通解**

当n不为整数时，贝塞尔方程通解的结构有两种：$y=AJ_n(x)+BJ_{-n}(x)$　$y=AJ_n(x)+BY_n(x)$

当n为整数时，贝塞尔方程通解的结构为$y=AJ_n(x)+BY_n(x)$

不论n是否为整数，贝塞尔方程的通解均可以表示为$y=AJ_n(x)+BY_n(x)$

贝塞尔函数的递推公式

小节1 / 贝塞尔函数的递推公式

贝塞尔函数的递推公式

本节我们介绍几个常用的贝塞尔函数递推公式。

$$\frac{d}{dx}[x^n J_n(x)] = x^n J_{n-1}(x) \qquad \frac{d}{dx}[x^{-n} J_n(x)] = -x^{-n} J_{n+1}(x)$$

$$J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x) \qquad J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) = 2J'_n(x)$$

$$\frac{d}{dx}[x^n Y_n(x)] = x^n Y_{n-1}(x) \qquad \frac{d}{dx}[x^{-n} Y_n(x)] = -x^{-n} Y_{n+1}(x)$$

$$Y_{n-1}(x) + Y_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} Y_n(x) \qquad Y_{n-1}(x) - Y_{n+1}(x) = 2Y'_n(x)$$

例题4-1 / 计算下列各式：(1) $\dfrac{d}{dx}[x^{2017}J_{2016}(x)]$ (2) $\displaystyle\int_0^1 r^3 J_0(r)dr$ (3) $\displaystyle\int x^2 J_3(x)dx$

解析4-1 / （1）原式 $= \dfrac{d}{dx}[x \cdot x^{2016}J_{2016}(x)]$

$$= x^{2016}J_{2016}(x) + x \cdot \frac{d}{dx}\left[x^{2016}J_{2016}(x)\right]$$

$$= x^{2016}J_{2016}(x) + x \cdot x^{2016}J_{2015}(x)$$

补充： $\dfrac{d}{dx}[x^n J_n(x)] = x^n J_{n-1}(x)$

例题4-1 计算下列各式：(1) $\dfrac{d}{dx}[x^{2017}J_{2016}(x)]$ (2) $\displaystyle\int_0^1 r^3 J_0(r)dr$ (3) $\displaystyle\int x^2 J_3(x)dx$

解析4-1

（2）原式 $\displaystyle= \int_0^1 r^3 J_0(r)dr = \int_0^1 r^2 \cdot rJ_0(r)dr$ → $\dfrac{d}{dr}\left[xJ_1(x)\right] = xJ_0(x)$ 的逆用，凑微分

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 r^2 d\left[rJ_1(r)\right] \\
&= r^3 J_1(r)\Big|_0^1 - \int_0^1 rJ_1(r)d\left(r^2\right) \\
&= r^3 J_1(r)\Big|_0^1 - \int_0^1 rJ_1(r)\cdot 2rdr \\
&= r^3 J_1(r)\Big|_0^1 - 2\int_0^1 r^2 J_1(r)dr \\
&= r^3 J_1(r)\Big|_0^1 - 2\int_0^1 r^2 J_1(r)dr
\end{aligned}$$

$$= J_1(1) - 2\int_0^1 r^2 J_1(r)dr$$

→ $\dfrac{d}{dr}\left[x^n J_n(x)\right] = x^n J_{n-1}(x)$ 的逆用，升阶次，去积分号

$$\begin{aligned}
&= J_1(1) - 2\left[r^2 J_2(r)\right]_0^1 \\
&= J_1(1) - 2J_2(1)
\end{aligned}$$

例题4-1 / 计算下列各式：(1) $\dfrac{d}{dx}[x^{2017}J_{2016}(x)]$ (2) $\int_0^1 r^3 J_0(r)dr$ (3) $\int x^2 J_3(x)dx$

解析4-1 / (3) 原式 $=\int x^4x^{-2}J_3(x)dx$

$\longrightarrow$ $\dfrac{d}{dr}\left[x^{-n}J_n(x)\right]=-x^{-n}J_{n+1}(x)$ 的逆用，降阶次，去积分号

$$
\begin{aligned}
&=\int x^4 d\left[-x^2J_2(x)\right]\\
&=-x^2J_2(x)-\int -x^{-2}J_2(x)d\left(x^4\right)\\
&=-x^2J_2(x)+4\int xJ_2(x)dx\\
&=-x^2J_2(x)+4\int x^2x^{-1}J_2(x)dx\\
&=-x^2J_2(x)+4\int x^2 d\left[-x^{-1}J_1(x)\right]\\
&=-x^2J_2(x)+4\left[-xJ_1(x)-\int -x^{-1}J_1(x)d\left(x^2\right)\right]\\
&=-x^2J_2(x)-4xJ_1(x)+8\int J_1(x)dx
\end{aligned}
$$

例题4-1 / 计算下列各式：(1) $\frac{d}{dx}[x^{2017}J_{2016}(x)]$ (2) $\int_0^1 r^3 J_0(r)dr$ (3) $\int x^2 J_3(x)dx$

解析4-1 /

$$= -x^2J_2(x) - 4xJ_1(x) + 8\int J_1(x)dx$$

$$= -x^2J_2(x) - 4xJ_1(x) + 8\int \left[-J_0{}'(x)\right] dx$$

$$= -x^2J_2(x) - 4xJ_1(x) - 8J_0(x) + C$$

函数展开成贝塞尔函数的级数

函数展开成贝塞尔函数的级数

贝塞尔函数的零点

在应用贝塞尔函数解决数学物理方程的定解问题时，需要首先确定贝塞尔方程的特征函数系，因此我们首先需要考虑贝塞尔函数的零点，另外贝塞尔函数系为正交系，从而我们即可进行级数展开。

$$\begin{cases} r^2P''(r)+rP'(r)+(\lambda r^2-n^2)P(r)=0\ ,\ 0<r<R \\ P(r)\big|_{r=R}=0 \\ |P(0)|<+\infty \end{cases}$$

$x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+x\dfrac{dy}{dx}+(x^2-n^2)y=0$ 的通解为 $y=AJ_n(x)+BY_n(x)$

已知 $x=\sqrt{\lambda}r$，则方程的通解为 $P(r)=AJ_n(\sqrt{\lambda}r)+BY_n(\sqrt{\lambda}r)$

根据条件 $|P(0)|<+\infty$，可知方程在 $x=0$ 处有界，则 $B=0$，通解为 $P(r)=AJ_n(\sqrt{\lambda}r)$

又因为 $P(r)\big|_{r=R}=0$，故有 $J_n(\sqrt{\lambda}R)=0$，为了确定特征值 λ，就必须确定贝塞尔函数的零点。

贝塞尔函数的零点

假设贝塞尔函数的零点记作 $\mu_m^{(n)}$，表示 $J_n(x)$ 的非负零点（m=1,2,…），则方程 $J_n(\sqrt{\lambda}R)=0$ 的解为

$$\sqrt{\lambda}R=\mu_m^{(n)}\ ,\ m=1,2,\cdots \longrightarrow \lambda=\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{R}\right)^2\ ,\ m=1,2,\cdots$$ 特征值

$$P(r)=AJ_n(\sqrt{\lambda}r) \longrightarrow P_m(r)=J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{R}r\right)\ ,\ m=1,2,\cdots$$ 特征函数

这样，我们就通过研究贝塞尔函数的零点确定了求解贝塞尔方程的特征值与特征函数。

函数展开成贝塞尔函数的级数

贝塞尔函数的正交性

$\{J_n(\frac{\mu_m^{(n)}}{R}r)\}\Big|_{m=1,2,\cdots}$ 为正交函数系，$\mu_m^{(n)}$ 为 $J_n(x)$ 的非负零点，即 $J_n(\mu_m^{(n)})=0$ 。

$$\int_0^R rJ_n(\frac{\mu_m^{(n)}}{R}r)J_n(\frac{\mu_k^{(n)}}{R}r)dr=\begin{cases}0 & m\neq k\\ \frac{R^2}{2}J_{n-1}^2(\mu_m^{(n)})=\frac{R^2}{2}J_{n+1}^2(\mu_m^{(n)}) & m=k\end{cases}$$

我们通常把 $\int_0^R rJ_n^2(\frac{\mu_m^{(n)}}{R}r)dr$ 的算术平方根，称为贝塞尔函数 $J_n(\frac{\mu_m^{(n)}}{R}r)$ 的模值。

函数展开成贝塞尔函数的级数

函数展开成贝塞尔函数的级数

任意在$[0,R]$上具有一阶连续导数及分段连续的二阶导数的函数$f(r)$，只要它在$r=0$处有界，在$r=R$处为零，则它必然能够展开成如下形式的绝对且一致收敛的级数

$$f(r)=\sum_{m=1}^{\infty}A_mJ_n(\frac{\mu_m^{(n)}}{R}r)$$

求解系数时，我们在级数两端同时乘以 $rJ_n(\frac{\mu_k^{(n)}}{R}r)$，并对$r$从0到$R$积分，根据正交性，得

$$\int_0^R rf(r)J_n(\frac{\mu_k^{(n)}}{R}r)dr=\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^R A_mrJ_n(\frac{\mu_m^{(n)}}{R}r)J_n(\frac{\mu_k^{(n)}}{R}r)dr=A_k\int_0^R rJ_n^2(\frac{\mu_k^{(n)}}{R}r)dr$$

因此系数 $A_k=\dfrac{1}{\frac{R^2}{2}J_{n-1}^2(\mu_k^{(n)})}\displaystyle\int_0^R rf(r)J_n(\frac{\mu_k^{(n)}}{R}r)dr$

例题4-2 设有半径为1的薄均匀圆盘，边界上的温度为0摄氏度，初始时刻圆盘内温度分布为 $1-r^2$，其中r为圆盘内任意点的极半径，试求圆盘内温度的分布规律。

解析4-2 在圆域内求解问题，故采用极坐标系较为方便，并考虑到定解问题与θ无关，故温度u只能是关于r，t的函数

根据问题的要求可归结为求解下列定解问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{dt} = a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r}\right), & 0 \leqslant r < 1 \quad t > 0 \\ u\big|_{r=1} = 0, \quad t > 0 \\ u\big|_{t=0} = 1 - r^2, \quad 0 \leqslant r \leqslant 1 \end{cases}$$

此外，根据物理意义，应有以下附加条件：

（1）温度有界　$|u| < +\infty$

（2）逐渐冷却　$t \to \infty$时，$u \to 0$

令 $u(r,t) = F(r)T(t)$ 带入方程 $\dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r}\right)$

得：$FT' = a^2\left(F'' + \dfrac{1}{r}F'\right)T$ 或 $\dfrac{T'}{a^2T} = \dfrac{F'' + \frac{1}{r}F'}{F} = -\lambda$

由此得：$T' + a^2\lambda T = 0, \quad r^2F'' + rF' + \lambda r^2 F = 0$

例题4-2 设有半径为1的薄均匀圆盘，边界上的温度为0摄氏度，初始时刻圆盘内温度分布为 $1-r^2$，其中 r为圆盘内任意点的极半径，试求圆盘内温度的分布规律。

解析4-2

$T'+a^2\lambda T=0,\quad r^2F''+rF'+\lambda r^2F=0$

$T'+a^2\lambda T=0$ 的解为： $T(t)=Ce^{-a^2\lambda t}$ $\quad t\to\infty \quad u\to 0$

故 $\lambda>0$，令 $\lambda=\beta^2$，则 $T(t)=Ce^{-a^2\beta^2 t}$

此时，方程 $r^2F''+rF'+\lambda r^2F=0$为0阶贝塞尔函数，其通解为：$F(r)=C_1J_0(\beta r)+C_2Y_0(\beta r)$

$u(r，t)$只能取有限值，且 $Y_0(\beta r)$ 在 $r=0$ 处为无穷大，故 $C_2=0$ $\quad F(r)=C_1J_0(\beta r)$

由 $u|_{r=1}=0$ 可知 $J_0(\beta)=0$，即 β 为 $J_0(x)$ 的零点

以 $\mu_n^{(0)}$ 表示 $J_0(x)$ 的正零点，则有 $\beta=\mu_n^{(0)}(n=1,2,3,\cdots)$

综合以上结果 $F_n(r)=J_0\left(\mu_n^{(0)}r\right)$ $\quad T_n(t)=C_ne^{-a^2\beta^2t}=C_ne^{-a^2\left(\mu_n^{(0)}\right)^2t}$

从而得出：$u(r,t)=C_ne^{-a^2\left(\mu_n^{(0)}\right)^2t}J_0\left(\mu_n^{(0)}r\right)$

利用叠加原理，原问题的解为：

$$u(r,t)=\sum_{k=1}^{\infty}C_ne^{-a^2\left(\mu_n^{(0)}\right)^2t}J_0\left(\mu_n^{(0)}r\right)$$

例题4-2 设有半径为1的薄均匀圆盘，边界上的温度为0摄氏度，初始时刻圆盘内温度分布为 $1-r^2$，其中 r为圆盘内任意点的极半径，试求圆盘内温度的分布规律。

解析4-2

$$u(r,t)=\sum_{k=1}^{\infty} C_n e^{-a^2\left(\mu_n^{(0)}\right)^2 t} J_0\left(\mu_n^{(0)} r\right)$$

由 $u|_{t=0}=1-r^2$，得 $1-r^2=\sum_{n=1}^{\infty} C_n J_0\left(\mu_n^{(0)} r\right)$

根据贝塞尔函数的正交性得:

$$C_n=\frac{2}{\left[J_0'\left(\mu_n^{(0)}\right)\right]^2}\int_0^1\left(1-r^2\right) rJ_0\left(\mu_n^{(0)}r\right)dr=\frac{2}{\left[J_1\left(\mu_n^{(0)}\right)\right]^2}\left[\int_0^1 rJ_0\left(\mu_n^{(0)}r\right)dr-\int_0^1 r^3J_0\left(\mu_n^{(0)}r\right)dr\right]$$

$$\int_0^1 rJ_0\left(\mu_n^{(0)}r\right)dr=\frac{1}{(\mu_n^{(0)})^2}\int_0^1 \mu_n^{(0)}rJ_0\left(\mu_n^{(0)}r\right)d\left(\mu_n^{(0)}r\right)=\frac{1}{(\mu_n^{(0)})^2}(\mu_n^{(0)}r)J_1(\mu_n^{(0)}r)\big|_0^1=\frac{J_1(\mu_n^{(0)})}{\mu_n^{(0)}}$$

$$\int_0^1 r^3J_0\left(\mu_n^{(0)}r\right)dr=\int_0^1 r^2 d\left[\frac{rJ_1\left(\mu_n^{(0)}r\right)}{\mu_n^{(0)}}\right]=r^3\frac{J_1(\mu_n^{(0)}r)}{\mu_n^{(0)}}\big|_0^1-\frac{2}{\mu_n^{(0)}}\int_0^1 r^2J_1(\mu_n^{(0)}r)dr$$

$$=\frac{J_1(\mu_n^{(0)})}{\mu_n^{(0)}}-\frac{2}{(\mu_n^{(0)})^2}r^2J_2(\mu_n^{(0)}r)\big|_0^1=\frac{J_1\left(\mu_n^{(0)}\right)}{\mu_n^{(0)}}-\frac{2J_2\left(\mu_n^{(0)}\right)}{\left(\mu_n^{(0)}\right)^2}$$

例题4-2 / 设有半径为1的薄均匀圆盘，边界上的温度为0摄氏度，初始时刻圆盘内温度分布为 $1-r^2$，其中r为圆盘内任意点的极半径，试求圆盘内温度的分布规律。

解析4-2 / 所以： $$C_n=\frac{4J_2\left(\mu_n^{(0)}\right)}{\left(\mu_n^{(0)}\right)^2J_1^2\left(\mu_n^{(0)}\right)}$$

因此所求定解问题的解为：

$$u(r,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4J_2\left(\mu_n^{(0)}\right)}{\left(\mu_n^{(0)}\right)^2J_1^2\left(\mu_n^{(0)}\right)}J_0\left(\mu_n^{(0)}r\right)e^{-a^2\left(\mu_n^{(0)}\right)^2t}$$

贝塞尔函数

斐多课堂+ Phaedo Classes 数学物理方程 不挂科 第4讲