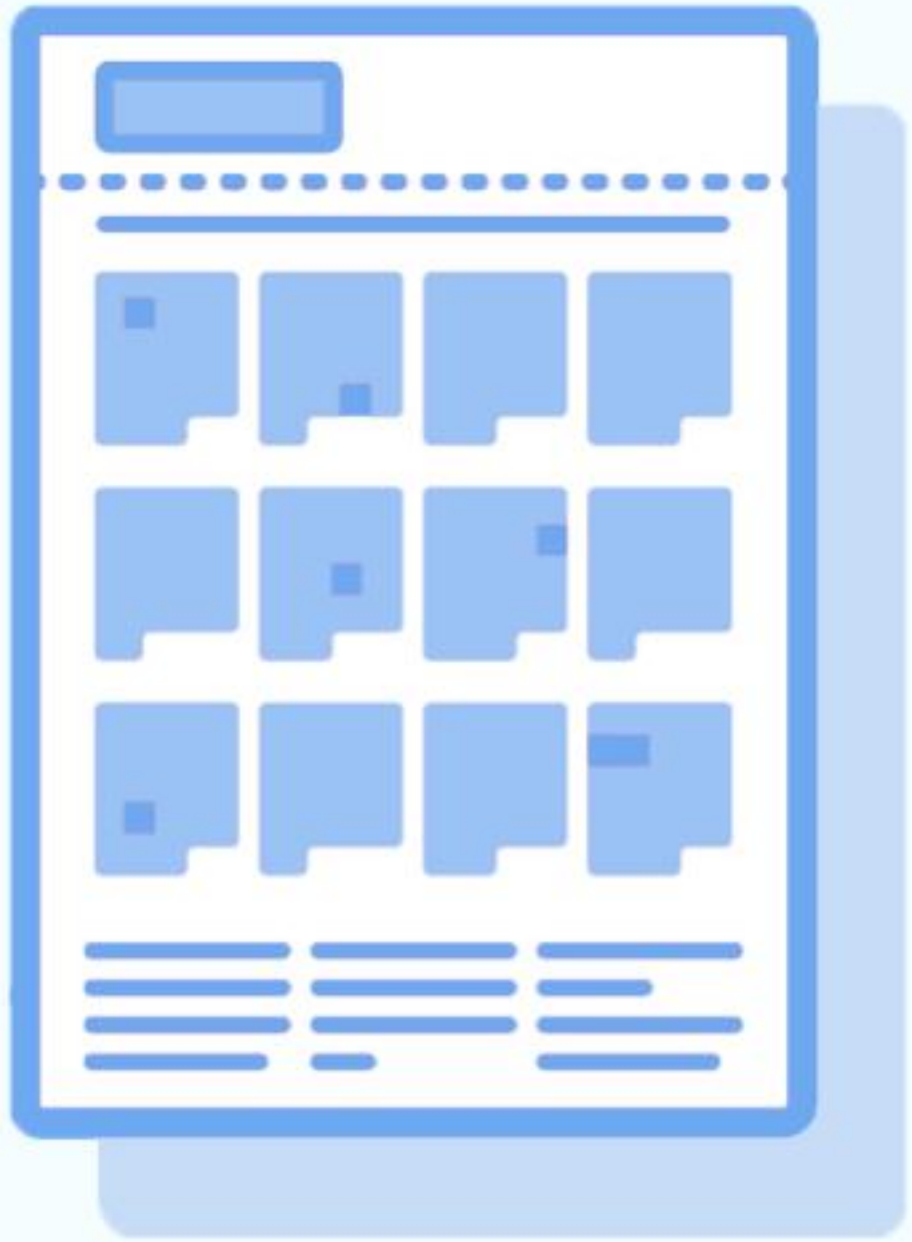
数学物理方程的基本概念

斐哥课堂+ Phaedo Classes 数学物理方程 不挂科 第1讲



4大模块

1道题目

数学物理方程的基本概念

- 模块1 / 预备知识
- 模块2 / 三类基本数学物理方程
- 模块3 / 初值条件与边界条件
- 模块4 / 定解问题的提法

预备知识

小节1 / 常微分方程

小节2 / 偏微分方程

预备知识

小节1 / 常微分方程

小节2 / 偏微分方程

常微分方程「二阶常系数微分方程」

二阶常系数齐次线性微分方程的一般形式为 $y''(x)+py'(x)+qy(x)=0$

其特征方程为 $r^2+pr+q=0$，特征根为 r_1 ,r_2

1. 当 r_1 ,r_2 为互不相等的实根时，齐次方程的通解形式为 $y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$

2. 当 $r_1=r_2=r$，即为二重实根时，齐次方程的通解形式为 $y=(C_1x+C_2)e^{rx}$

3. 当 $r_{1,2}=\alpha\pm j\beta$，即为一对共轭复根时，齐次方程的通解形式为 $y=e^{\alpha t}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

二阶常系数非齐次线性微分方程的解的结构包含两部分

一部分是对应齐次方程的齐次解，由特征根决定；另一部分特解由非齐次方程的自由项决定，即

$Y=y+Y^*$

常微分方程「欧拉方程」

变系数二阶线性常微分方程 $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+x\dfrac{dy}{dx}-n^2y=0$ 称为欧拉方程

欧拉方程的解法：

作变量代换，令 $x=e^t$, $y=y(x)=y(e^t)=z(t)$，则有

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}=y'e^t=x\frac{dy}{dx} \qquad \frac{d^2y}{dt^2}=\frac{d(xy')}{dx}\frac{dx}{dt}=(y'+xy'')e^t=x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}$$

因此原方程可以化为 $\dfrac{d^2y}{dt^2}-n^2y=0$。

$n=0$ 时，$\dfrac{d^2y}{dt^2}=0$，等式两端积分两次，$y=z_0(t)=c_0+d_0t \qquad y(x)=c_0+d_0\ln x$

$n>0$ 时，方程的特征根为 $\pm n$，$y=z(t)=c_ne^{nt}+d_ne^{-nt} \qquad y(x)=c_nx^n+d_nx^{-n}$

预备知识

小节1 / 常微分方程

小节2 / 偏微分方程

偏微分方程

1 定义

除了含有几个自变量和未知函数以外，还含有未知函数的偏导数（也可以仅含偏导数）的方程。

一般形式

$$F(\underbrace{x_1, x_2, \cdots, x_n}_{\text{自变量}}, \underbrace{u}_{\text{未知函数}}, \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \cdots}_{\text{未知函数的偏导数（一阶、高阶或混合偏导）}}) = 0$$

2 方程的阶：方程中涉及到的未知函数偏导数的最高阶数称为偏微分方程的阶。

3 线性偏微分方程：方程中未知函数及其各阶偏导数都是线性（一次）的，且系数仅依赖于自变量。

4 （非）齐次偏微分方程：对于线性偏微分方程而言，将不含未知函数及其偏导数的项称为自由项。

（非）齐次偏微分方程值的是当自由项（不）为0的方程。

例题1-1 / 判断下列方程的类型并指出方程的阶。

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2})+f(x,y,z,t)$$ 线性，非齐次，2阶

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$ 线性，齐次，2阶

$$\left[1+(\frac{\partial u}{\partial y})^2\right]\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0$$ 非线性，2阶

$$\frac{\partial u}{\partial t}+cu\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}=0$$ 非线性，3阶

三类基本数学物理方程

小节1 / 波动方程

小节2 / 热传导方程

小节3 / 拉普拉斯方程

三类基本数学物理方程

小节1 / 波动方程

小节2 / 热传导方程

小节3 / 拉普拉斯方程

波动方程

波动方程用来解决弦振动问题，设 $u(x,y,z,t)$ 为 t 时刻弦在不同位置振动所产生的位移。

齐次方程 对应弦的自由振动。

- 一维波动方程 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$
- 二维波动方程 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$
- 三维波动方程 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$

$$\longrightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u \qquad \boxed{\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \quad (n = 1,2,3)}$$

拉普拉斯算子

非齐次方程 对应弦的受迫振动。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u + f$$

f 是与位置和时间有关的函数，和所受受迫力有关。

三类基本数学物理方程

小节1 / 波动方程

小节2 / 热传导方程

小节3 / 拉普拉斯方程

热传导方程

热传导方程用来解决求解物体内部温度分布的问题。设 $u(x,y,z,t)$ 为 t 时刻物体内不同位置的温度。

齐次方程 对应物体内无热源。

- 一维热传导方程 $$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
- 二维热传导方程 $$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$
- 三维热传导方程 $$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial t}=a^2\Delta u$$

$$\boxed{\Delta=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\quad (n=1,2,3)}$$

拉普拉斯算子

非齐次方程 对应物体内有热源。

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\Delta u+f$$

f 是与位置和时间有关的函数，和物体内的热源产热有关。

三类基本数学物理方程

小节1 / 波动方程

小节2 / 热传导方程

小节3 / 拉普拉斯方程

拉普拉斯方程

拉普拉斯方程用来解决稳恒态模型问题，如稳恒的温度场，稳恒电场等。

- 二维拉普拉斯方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$

- 三维拉普拉斯方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$

$$\Rightarrow \quad \Delta u=0 \qquad \boxed{\Delta=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\quad (n=1,2,3)}$$

拉普拉斯算子

- 极坐标下的拉普拉斯方程

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=0 \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=0$$

- 球坐标下的拉普拉斯方程

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}=0$$

初值条件与边界条件

小节1 / 初值条件

小节2 / 边界条件

初值条件与边界条件

小节1 / 初值条件

小节2 / 边界条件

初值条件

确定方程之后，我们还需要通过**初值条件**和**边界条件**对模型进行进一步的描述，从而求出对应的解。

- **初值条件**　用于说明某一物理现象初始状态的条件。

弦振动初值条件：弦在开始时刻的位移和速度。

$$\begin{cases} u\big|_{t=0} = \varphi(x) & \text{开始时刻的位移} \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x) & \text{开始时刻的速度} \end{cases}$$

热传导方程初值条件：开始时刻物体温度的分布情况。 $u(M,t)\big|_{t=0} = \varphi(M)$

拉普拉斯方程：描述稳恒状态，与初值状态无关，因此不提初值条件。

初值条件与边界条件

小节1 / 初值条件

小节2 / 边界条件

边界条件

- **边界条件**　用于说明边界上的约束情况的条件。

边界条件「弦振动边界条件」

弦振动边界条件：有三种情况

1. 固定端：即弦在振动过程中端点保持不动，则对应边界条件为 $u\Big|_{x=a}=0$ 或 $u(a,t)=0$

2. 自由端：即弦在此端点不受位移方向的外力，则对应边界条件为 $\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=a}=0$ 或 $u_x(a,t)=0$

3. 弹性支承端：即弦在此端点被某个弹性体所支承，则对应边界条件为 $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}+\sigma u\right)\Big|_{x=a}=0$

边界条件「热传导边界条件」

热传导边界条件：有三种情况

1. 在导热过程中，物体在边界S上的温度为已知函数$f(x,y,z,t)$： $u\big|_S = f$

2. 在导热过程中，物体与周围介质绝热，边界S上流过的热量为0： $\dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_S = 0$

3. 在导热过程中，物体内部与外界有通过边界 S 的热量交换： $\left(\dfrac{\partial u}{\partial n} + \sigma u\right)\Big|_S = \sigma u_1\Big|_S$

边界条件「三类边界条件」

三类边界条件：从数学角度看，波动和热传导的边界条件可以划分为3类：

第一类：在边界S上直接给出了未知函数u的数值。 $u\big|_S = f_1$

第二类：在边界S上给出了u沿边界的外法线方向的方向导数。 $\dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_S = f_2$

第三类：在边界S上给出了u及其沿边界的外法线方向的方向导数的某种线性组合。 $(\dfrac{\partial u}{\partial n} + \sigma u)\Big|_S = f_3$

三类边界条件右端的 $f_i\ (i = 1,2,3)$ 均为定义在边界S上的函数，不论哪一种类型的边界条件，当它的数学表达式中自由项（不依赖于u的项）为0时，则称边界条件是齐次的，否则称非齐次的。

定解问题的提法

小节1 / 定解问题

小节2 / 叠加原理

定解问题的提法

小节1 / 定解问题

小节2 / 叠加原理

定解问题的提法

- **定解问题**

初值条件和边界条件都称为定解条件，我们把**某个偏微分方程和相应的定解条件**结合在一起，就构成了**定解问题**。

只有初值条件，没有边界条件的定解问题称为**初值问题（或柯西(Cauchy)问题）**；

只有边界条件，没有初值条件的定解问题称为**边值问题**；

既有初值条件，又有边界条件的定解问题称为**混合问题**。

因此，我们的任务是求出偏微分方程的适合某些特定条件的解，也就是求解定解问题。

定解问题的提法

小节1 / 定解问题

小节2 / 叠加原理

叠加原理

我们用L算子表示偏微分方程，则一个含n个自变量的2阶线性偏微分方程可表示为

$$L[u] \equiv \sum_{i,k=1}^{n} A_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{i=1}^{n} B_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + Cu = f$$

其中 A_{ik} ,B_i ,C ,f 都只是关于n个自变量的已知函数，与未知函数无关，当两个自变量时，可变为

$$\boxed{A(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + E(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + F(x,y)u = f(x,y)}$$

未知函数含2个自变量的二阶线性偏微分方程的一般形式

叠加原理

叠加原理是线性偏微分方程的一个重要特性，其内容是：

如果 u_i 是方程 $L[u_i]=f_i$ 的解，且级数 $u=\sum_{i=1}^{\infty}C_iu_i$ 收敛，并且能够逐项微分两次，其中 $C_i\ (i=1,2,\cdots)$ 为任意常数，则u一定是方程 $L[u]=\sum_{i=1}^{\infty}C_if_i$ 的解（假定方程右端级数收敛）。

特别的，如果u_i 是二阶线性齐次方程$L[u]\equiv 0$的解，则只要 $u=\sum_{i=1}^{\infty}C_iu_i$ 收敛，并且能够逐项微分两次，则u一定是方程的解，这一结论是下一讲分离变量法的基础。

数学物理方程的基本概念