行波法与积分变换法

斐哥课堂+ Phaedo Classes 数学物理方程 不挂科 第3讲

4大模块

8道题目

行波法与积分变换法

模块1 / 一维波动方程的达朗贝尔公式

模块2 / 傅立叶变换

模块3 / 拉普拉斯变换

模块4 / 积分变换法举例

一维波动方程的达朗贝尔公式

小节1 / 达朗贝尔公式的推导

小节2 / 特征变换

小节3 / 二阶线性偏微分方程的特征方程

一维波动方程的达朗贝尔公式

小节1 / 达朗贝尔公式的推导

小节2 / 特征变换

小节3 / 二阶线性偏微分方程的特征方程

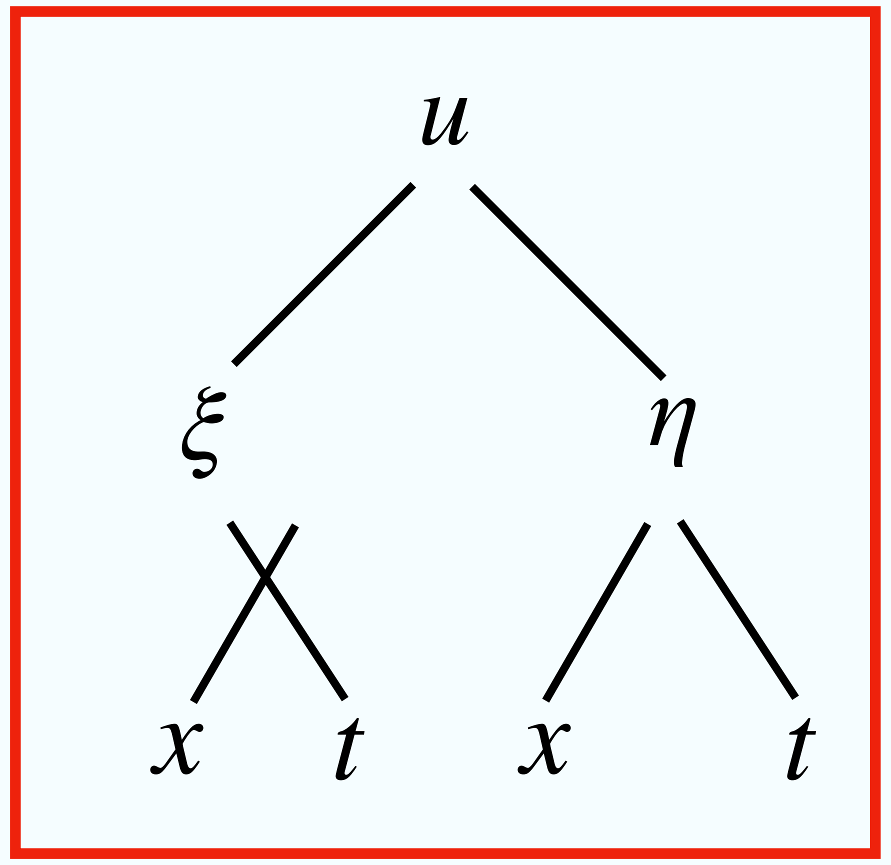
达朗贝尔公式的推导

对于一维波动方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 我们作代换 $\xi = x + at \quad \eta = x - at$

利用复合函数求导法则

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$



同理， $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left[\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right]$

代回方程，可得 $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$

达朗贝尔公式的推导

在 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0$ 两端同时对 η 积分，则有 $\dfrac{\partial u}{\partial\xi}=f(\xi)$

继续对 ξ 积分，则有：

$$u(x,t)=\int f(\xi)d\xi+f_2(\eta)=f_1(x+at)+f_2(x-at)$$

其中f_1,f_2均为任意二次连续可微函数

这个式子就是一维波动方程的通解。

我们进一步考虑定解条件，从而确定两个函数的具体形式，接下来我们讨论**无限长弦的自由横振动**。

设弦的初始状态为已知，即已知定解条件为 $\begin{cases} u\Big|_{t=0}=\varphi(x) & -\infty<x<+\infty \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi(x) & -\infty<x<+\infty \end{cases}$

达朗贝尔公式的推导

$$\begin{cases} u\Big|_{t=0} = \varphi(x) & -\infty < x < +\infty \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x) & -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

代入$u(x,t) = f_1(x+at) + f_2(x-at)$，有 $\begin{cases} f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x) \\ af'_1(x) - af'_2(x) = \psi(x) \end{cases}$

对 $af'_1(x) - af'_2(x) = \psi(x)$ 两端对x积分一次，有 $f_1(x) - f_2(x) = \dfrac{1}{a}\displaystyle\int_0^x \psi(\xi)d\xi + C$

根据 $\begin{cases} f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x) \\ f_1(x) - f_2(x) = \frac{1}{a}\int_0^x \psi(\xi)d\xi + C \end{cases}$ 可解得

$$f_1(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2a}\int_0^x \psi(\xi)d\xi + \frac{C}{2}$$

$$f_2(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2a}\int_0^x \psi(\xi)d\xi - \frac{C}{2}$$

达朗贝尔公式的推导

$$f_1(x)=\frac{1}{2}\varphi(x)+\frac{1}{2a}\int_0^x\psi(\xi)d\xi+\frac{C}{2}\qquad f_2(x)=\frac{1}{2}\varphi(x)-\frac{1}{2a}\int_0^x\psi(\xi)d\xi-\frac{C}{2}$$

$$u(x,t)=f_1(x+at)+f_2(x-at)$$

$$=\frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi$$

$$\boxed{u(x,t)=\frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi}$$

无限长弦自由振动的达朗贝尔公式

一维波动方程的达朗贝尔公式

小节1 / 达朗贝尔公式的推导

小节2 / 特征变换

小节3 / 二阶线性偏微分方程的特征方程

特征变换

一维波动方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 的特征方程为 $(dx)^2 - a^2(dt)^2 = 0$

其积分曲线（特征线）为 $x \pm at = Const$

因此我们称 $\xi = x + at \quad \eta = x - at$ 为特征变换，行波法也称为特征线法

一维波动方程的达朗贝尔公式

小节1 / 达朗贝尔公式的推导

小节2 / 特征变换

小节3 / 二阶线性偏微分方程的特征方程

二阶线性偏微分方程的特征方程

一般情况下，二阶线性偏微分方程 $A\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+D\dfrac{\partial u}{\partial x}+E\dfrac{\partial u}{\partial y}+Fu\equiv 0$的特征方程为

$$\underline{A(dy)^2-2Bdxdy+C(dx)^2=0}$$

这个常微分方程的积分曲线称为线性偏微分方程的特征曲线；

二阶线性偏微分方程的特征弦仅与该方程中的**二阶导数项系数**有关，而与其低阶项系数无关。

$B^2-AC>0$ 双曲型方程：如波动方程

$B^2-AC=0$ 抛物型方程：如热传导方程

$B^2-AC<0$ 椭圆型方程：如拉普拉斯方程，泊松方程

不论方程为什么形式，我们都可以通过适当的自变量之间的代换将其化为标准形式。

例题3-1 求下列初值问题的解

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad -\infty < x < \infty \ , y > 0 \\ u\Big|_{y=0} = 3x^2 \quad , \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} = 0, \quad -\infty < x < \infty \end{cases}$$

解析3-1 先确定所给方程的特征线，它的特征方程为：$(dy)^2 - 2(dxdy) - 3(dx)^2 = 0$

即 $(dy + dx)(dy - 3dx) = 0$

故他的积分曲线为：$3x - y = C_1, \quad x + y = C_2$

作特征变换得 $\begin{cases} \xi = 3x - y \\ \eta = x + y \end{cases}$

则 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = 3\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial \xi}(3\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta})\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta}(3\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta})\frac{\partial \eta}{\partial x} = 9\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 6\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial \xi}(-\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta})\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \eta}(-\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta})\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

例题3-1 求下列初值问题的解

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-3\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \quad -\infty<x<\infty\ ,\ y>0 \\ u\Big|_{y=0}=3x^2\ ,\ \dfrac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0}=0,\ -\infty<x<\infty \end{cases}$$

解析3-1

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial \xi}\left(3\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial \eta}\left(3\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\frac{\partial \eta}{\partial y}=-3\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

代入方程 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-3\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$

可得 $\boxed{\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}=0}$ ← 齐次方程均可推至此式

将 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}=0$ 对 η 积分，有 $\dfrac{\partial u}{\partial \xi}=f(\xi)$，再对 ξ 积分，有 $u(\xi,\eta)=\int f(\xi)d(\xi)+f_2(\eta)=f_1(\xi)+f_2(\eta)$

f_1,f_2 为两个任意二次连续可微的函数

故 $u(x,y)=f_1(3x-y)+f_2(x+y)$

例题3-1 求下列初值问题的解

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-3\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \quad -\infty<x<\infty\ ,\ y>0 \\ u\Big|_{y=0}=3x^2\ \ ,\ \dfrac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0}=0,\ -\infty<x<\infty \end{cases}$$

解析3-1

故 $u(x,y)=f_1(3x-y)+f_2(x+y)$

将其带入 $u\Big|_{y=0}=3x^2,\quad \dfrac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0}=0$

可得 $\begin{cases} f_1(3x)+f_2(x)=3x^2 \\ -f_1'(3x)+f_2'(x)=0 \end{cases}$

由 $-f_1'(3x)+f_2'(x)$ 积分，可得 $-\dfrac{1}{3}f_1(3x)+f_2(x)=C$

根据 $\begin{cases} f_1(3x)+f_2(x)=3x^2 \\ -\frac{1}{3}f_1(3x)+f_2(x)=C \end{cases}$ 可得 $\begin{cases} f_1(3x)=\frac{9}{4}x^2-C' \\ f_2(x)=\frac{3}{4}x^2+C' \end{cases}$，即 $\begin{cases} f_1(x)=\frac{1}{4}x^2-C' \\ f_2(x)=\frac{3}{4}x^2+C' \end{cases}$ $\quad C'=\dfrac{3}{4}C$

$$\therefore u(x,y)=\frac{1}{4}(3x-y)^2+\frac{3}{4}(x+y)^2=3x^2+y^2$$

例题3-2 用行波法求解下列柯西问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 1 \quad -\infty < x < \infty \text{ , } y > 0 \\ u\Big|_{y=0} = 0 \text{ , } \dfrac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} = 2x, \quad -\infty < x < \infty \end{cases}$$

解析3-2 非齐次方程通过特征变换求解得到的结果不是 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$，需具体情况具体分析

原方程对应的特征方程为：$(dy)^2 + dxdy - 2(dx)^2 = 0$

可分解为：$(dy - dx)(dy + 2dx) = 0$

求得特征线为：$y + 2x = C_1$，$y - x = C_2$

作特征变换可得：$\xi = y + 2x$，$\eta = y - x$

则有：$\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial \xi}\dfrac{\partial \xi}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial \eta}\dfrac{\partial \eta}{\partial x} = 2\dfrac{\partial u}{\partial \xi} - \dfrac{\partial u}{\partial \eta}$ $\qquad \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial \xi}\dfrac{\partial \xi}{\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial \eta}\dfrac{\partial \eta}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial \xi} + \dfrac{\partial u}{\partial \eta}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial \xi}(2\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta})\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta}(2\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta})\frac{\partial \eta}{\partial x} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial \xi}(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta})\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \eta}(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta})\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

例题3-2 用行波法求解下列柯西问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 1 \quad -\infty < x < \infty\ ,\ y > 0 \\ u\Big|_{y=0} = 0\ ,\ \dfrac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} = 2x, \quad -\infty < x < \infty \end{cases}$$

解析3-2

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(2\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(2\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\frac{\partial \eta}{\partial y} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

带回方程得：$-9\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 1$，故 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = -\dfrac{1}{9}$ 与上例标准型不同

经过两次偏积分，可求得原方程的通解为：$u(\xi, \eta) = f_1(\xi) + f_2(\eta) - \dfrac{1}{9}\xi\eta$

即：$u(x, y) = f_1(y + 2x) + f_2(y - x) - \dfrac{1}{9}(y + 2x)(y - x)$

代入边界条件可得：

$$u\,|_{y=0} = f_1(2x) + f_2(-x) - \frac{2}{9}x^2 = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}\,|_{y=0} = f_1'(2x) + f_2'(-x) - \frac{1}{9}x = 2x$$

$$\longrightarrow \begin{cases} f_1(2x) + f_2(-x) = \frac{2}{9}x^2 \\ f_1(2x) - 2f_2(-x) = \frac{19}{9}x^2 + C' \end{cases} \qquad C' = 2C$$

解得：

$$\begin{cases} f_1(2x) = \frac{23}{27}x^2 + \frac{c'}{3} \\ f_2(-x) = -\frac{17}{27}x^2 - \frac{11}{27}x^2 - \frac{c'}{3} \end{cases}$$

例题3-2 用行波法求解下列柯西问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 1 \quad -\infty < x < \infty \text{ , } y > 0 \\ u\Big|_{y=0} = 0 \text{ , } \dfrac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} = 2x, \quad -\infty < x < \infty \end{cases}$$

解析3-2 解得：

$$\begin{cases} f_1(2x) = \dfrac{23}{27}x^2 + \dfrac{c'}{3} \\ f_2(-x) = -\dfrac{17}{27}x^2 - \dfrac{11}{27}x^2 - \dfrac{c'}{3} \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} f_1(x) = \dfrac{23}{108}x^2 + \dfrac{c'}{3} \\ f_2(x) = -\dfrac{17}{27}x^2 - \dfrac{c'}{3} \end{cases}$$

$$\therefore u(x,y) = \frac{23}{108}(y+2x)^2 - \frac{17}{27}(y-x)^2 - \frac{1}{9}(y+2x)(y-x)$$

傅立叶变换

小节1 / 傅立叶变换的定义式

小节2 / 傅立叶变换的性质

小节3 / 狄拉克函数及其傅立叶变换

傅立叶变换

小节1 / 傅立叶变换的定义式

小节2 / 傅立叶变换的性质

小节3 / 狄拉克函数及其傅立叶变换

傅立叶变换的定义式

假设函数 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的实函数，它在任一有限区间上分段光滑且在定义区间上绝对可积

$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\, dt < \infty$ 所以根据傅立叶积分的有关理论（从略），我们有如下定义：

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{i\omega x}d\omega$$

记 $f(x)$ 与 $F(j\omega)$ 为一对傅里叶变换对，简写为 $f(x) \leftrightarrow F(\omega)$。

$F(\omega)$ 为 $f(x)$ 的**傅立叶正变换（象函数）**，$f(x)$ 为 $F(\omega)$ 的**傅立叶逆变换（原函数）**。

记为 $F(\omega) = \mathscr{F}[f(x)]$ ，$f(x) = \mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]$

例题3-3 求下列函数的傅立叶变换

$$(1)\ \ f(x)=\begin{cases}0\ ,\ x<0\\ e^{-\beta x}\ ,\ x\geq 0\end{cases}\quad(\beta>0)\qquad\qquad (2)\ \ f(x)=\begin{cases}4\ ,\ \ -2<x<2\\ 0\ ,\ \ others\end{cases}$$

解析3-3

$$(1)\ \ F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-i\omega x}dx$$

$$=\int_0^{+\infty}e^{-\beta x}e^{-i\omega x}dx=\int_0^{+\infty}e^{-(\beta+i\omega)x}dx$$

$$=-\frac{1}{\beta+i\omega}e^{-(\beta+i\omega)x}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{\beta+i\omega}=\frac{\beta-i\omega}{\beta^2-\omega^2}$$

例题3-3 求下列函数的傅立叶变换

(1) $f(x)=\begin{cases}0\ ,\ x<0\\ e^{-\beta x}\ ,\ x\geq 0\end{cases}\quad(\beta>0)$　　(2) $f(x)=\begin{cases}4\ ,\ -2<x<2\\ 0\ ,\ others\end{cases}$

解析3-3 (2) $F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-i\omega x}dx$

$$=\int_{-2}^{2}4e^{-i\omega x}dx=4\int_{-2}^{2}e^{-i\omega x}dx$$

$$=4\left[-\frac{1}{i\omega}e^{-i\omega x}\right]_{-2}^{2}=4\frac{e^{2i\omega}-e^{-2i\omega}}{i\omega}$$

$$=\frac{8\sin 2\omega}{\omega}$$

欧拉公式：$\sin\theta=\dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

傅立叶变换

小节1 / 傅立叶变换的定义式

小节2 / 傅立叶变换的性质

小节3 / 狄拉克函数及其傅立叶变换

傅立叶变换的性质

线性性质 $C_1f_1(x)+C_2f_2(x)\leftrightarrow C_1F_1(\omega)+C_2F_2(\omega)$

位移性质 $f(x\pm x_0)\leftrightarrow F(\omega)e^{\pm i\omega x_0}$

延迟性质 $f(x)e^{\pm i\omega_0 x}\leftrightarrow F(\omega\mp\omega_0)$

微分性质 $f^{(n)}(x)\leftrightarrow (i\omega)^n F(\omega)$

积分性质 $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)dt\leftrightarrow \frac{1}{i\omega}F(\omega)$

卷积性质 $\displaystyle f_1(x)*f_2(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)f_2(x-t)dt$

$f_1(x)*f_2(x)\leftrightarrow F_1(\omega)\cdot F_2(\omega)$ $\qquad$ $f_1(x)\cdot f_2(x)\leftrightarrow \dfrac{1}{2\pi}F_1(\omega)*F_2(\omega)$

傅立叶变换

小节1 / 傅立叶变换的定义式

小节2 / 傅立叶变换的性质

小节3 / 狄拉克函数及其傅立叶变换

δ 函数及其傅立叶变换「弱收敛」

δ 函数又称单位脉冲函数，它是一个广义函数，不能用我们现有的知识进行严格定义，我们引入弱收敛这一概念，对 δ 函数进行简单的定义。

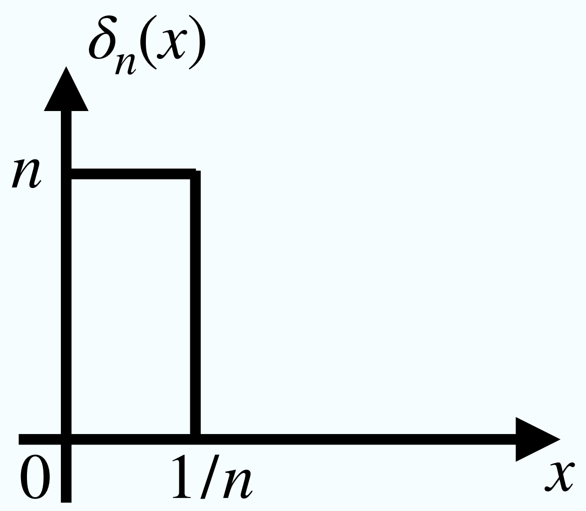
设 $\{f_n(x)\}(n=0,1,2,\cdots)$是区间 $[a,b]$（也可能是无界的）上的一个函数列，如果存在函数 $f(x)$ 使得对于任意一个在 $[a,b]$ 上连续的函数 $\varphi(x)$，都有

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\varphi(x)dx=\int_a^b f(x)\varphi(x)dx$$

则称$\{f_n(x)\}(n=0,1,2,\cdots)$在区间 $[a,b]$上弱收敛于$f(x)$，而满足上式的函数$f(x)$称为$\{f_n(x)\}$的弱极限。

δ 函数及其傅立叶变换「δ 函数的定义」

考虑矩形脉冲序列 $\delta_n(x) = \begin{cases} 0\ ,\ x < 0\ or\ x > \dfrac{1}{n} \\ n\ ,\ 0 \le x \le \dfrac{1}{n} \end{cases}$



则称$\{\delta_n(x)\}(n=1,2,3,\cdots)$在$(-\infty,+\infty)$内的弱极限称为$\delta$函数，记作$\delta(x)$，即：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\varphi(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_n(x)\varphi(x)dx$$

其中$\varphi(x)$为$(-\infty,+\infty)$内的任意连续函数，代入$\delta_n(x)$的表达式，根据积分中值定理，则有：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\varphi(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_n(x)\varphi(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_{0}^{\frac{1}{n}} n\varphi(x)dx = \lim_{n\to\infty}\varphi(\theta_n\frac{1}{n}) = \varphi(0) \qquad (0<\theta_n<1)$$

因此，有些材料中直接用该式作为δ 函数的定义：$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\varphi(x)dx = \varphi(0)$

此时，关于函数$\varphi(x)$的条件更强，要求其无穷次连续可微，且在$(-\infty,+\infty)$的某个有限闭区间之外恒为零。

δ 函数及其傅立叶变换「δ 函数的傅立叶变换」

因此通过δ 函数的定义，我们有重要结论 $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\varphi(x)dx=\varphi(0)$ $\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-x_0)\varphi(x)dx=\varphi(x_0)$

我们可以求得 δ 函数的傅立叶变换为 $\mathscr{F}[\delta(x)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)e^{-i\omega x}dx=e^{-i\omega x}\Big|_{x=0}=1$

$$\mathscr{F}[\delta(x\pm x_0)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x\pm x_0)e^{-i\omega x}dt=e^{-i\omega x}\Big|_{x=\mp x_0}=e^{\pm i\omega x_0}$$

我们还可以求出 $2\pi\delta(\omega-\omega_0)$ 的傅立叶逆变换

$$\mathscr{F}^{-1}[2\pi\delta(\omega-\omega_0)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}2\pi\delta(\omega-\omega_0)e^{i\omega x}d\omega=e^{i\omega x}\Big|_{\omega=\omega_0}=e^{i\omega_0 x}$$

因此我们得出 $\delta(x)$ 与1是一对傅立叶变换，$e^{i\omega_0 x}$ 和 $2\pi\delta(\omega-\omega_0)$ 为一对傅立叶变换

但是，此时1与 $e^{i\omega_0 x}$ 并不满足傅立叶变换存在时需满足的绝对可积条件，因此这里所讲的傅立叶变换是广义函数意义下的傅立叶变换，因此称为广义傅立叶变换。

例题3-4 求函数 $f(x)=\cos(\omega_0 x)$ 与 $f(x)=\sin(\omega_0 x)$ 的广义傅立叶变换。

解析3-4

$$\cos\omega_0 x=\frac{e^{i\omega_0 x}+e^{-i\omega_0 x}}{2}$$

已知 $e^{\pm i\omega_0 x}\leftrightarrow 2\pi\delta(\omega\mp\omega_0)$，故 $\mathscr{F}\left[\cos\omega_0 x\right]=\pi\left[\delta\left(\omega-\omega_0\right)+\delta\left(\omega+\omega_0\right)\right]$

$$\sin\omega_0 x=\frac{e^{i\omega_0 x}+e^{-i\omega_0 x}}{2i}$$

已知 $e^{\pm i\omega_0 x}\leftrightarrow 2\pi\delta(\omega\mp\omega_0)$，故 $\mathscr{F}\left[\sin\omega_0 x\right]=\pi i\left[\delta\left(\omega+\omega_0\right)-\delta\left(\omega-\omega_0\right)\right]$

拉普拉斯变换

小节1 / 拉普拉斯变换定义式

小节2 / 拉普拉斯变换性质

拉普拉斯变换

小节1 / 拉普拉斯变换定义式

小节2 / 拉普拉斯变换性质

拉普拉斯变换定义式

实际情况中函数只在$[0,+\infty)$上有定义，或函数在实轴上不满足绝对可积条件，或我们不关心$(-\infty,0)$的情形，此时我们用拉普拉斯变换对问题进行分析。

假设函数$f(t)$是定义在$[0,+\infty)$上的函数，且积分$\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$在$p$的某个区域内收敛，其中$p$是复参数，则这个积分在上述区域内就确定了一个以$p$为变量的函数，记作$F(p)$，即

$$F(p)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$$

$F(p)$称为$f(t)$的拉普拉斯变换，记为$F(p)=\mathscr{L}[f(t)]$

$f(t)$称为$F(p)$的拉普拉斯逆变换，记作$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(p)]$

例题3-5 计算下列函数的拉普拉斯变换

(1) $u(t)=\begin{cases}0\ ,\ t\le 0\\ 1\ ,\ t>0\end{cases}$ (2) $f(t)=e^{kt}\ \ k\in R$

解析3-5 (1) $\mathscr{L}[u(t)]=\int_0^{+\infty}u(t)e^{-pt}dt=\int_0^{+\infty}e^{-pt}dt$

当 $Re[p]>0$ 时，积分$\int_0^{+\infty}e^{-pt}dt$ 收敛，且 $\int_0^{+\infty}e^{-pt}dt=-\frac{1}{p}e^{-pt}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{p}$

故：$\mathscr{L}[u(t)]=\frac{1}{p}\quad Re[p]>0$

补充：收敛原因：当 $\int_0^{+\infty}e^{-pt}dt=\int_0^{+\infty}e^{-(\sigma+i\omega)t}dt$ 收敛时，

有：$\int_0^{+\infty}\left|e^{-pt}\right|dt=\int_0^{+\infty}|e^{-\sigma t}||e^{-i\omega t}|dt<\infty$

$\left|e^{-i\omega t}\right|=1$ 故此时：$\sigma>0$ 即 $Re[p]>0$

例题3-5 计算下列函数的拉普拉斯变换

(1) $u(t)=\begin{cases}0\ ,\ t\le 0\\ 1\ ,\ t>0\end{cases}$ (2) $f(t)=e^{kt}\ \ k\in R$

解析3-5 (2) $\mathscr{L}\left[e^{kt}\right]=\int_0^{+\infty}e^{kt}e^{-pt}=\int_0^{+\infty}e^{-(p-k)t}dt$

当 $Re([p]>k)$ 时，右端积分收敛，且 $\int_0^{+\infty}e^{-(p-k)t}dt=-\frac{1}{p-k}e^{-(p-k)t}|_0^{+\infty}=\frac{1}{p-k}$

故：$\mathscr{L}\left[e^{kt}\right]=\frac{1}{p-k}\qquad Re[p]>k$

补充：收敛原因：当 $\int_0^{+\infty}e^{-(p-k)t}dt=\int_0^{+\infty}e^{-(\sigma-k)t}e^{-i\omega t}dt$ 收敛时，

有：$\int_0^{+\infty}|e^{-(p-k)t}|dt=\int_0^{+\infty}|e^{-(\sigma-k)t}||e^{-i\omega t}|dt$

$\left|e^{-i\omega t}\right|=1$ 故此时：$\sigma>k$ 即 $Re[p]>k$

拉普拉斯变换

小节1 / 拉普拉斯变换定义式

小节2 / 拉普拉斯变换性质

拉普拉斯变换性质

线性性质 $af_1(t)+bf_2(t)\leftrightarrow aF_1(p)+bF_2(p)$

延迟性质 $f(t)e^{\pm\alpha t}\leftrightarrow F(p\mp\alpha)$

位移性质 $f(t\pm t_0)\leftrightarrow F(p)e^{\pm pt_0}$

积分性质 $\displaystyle\int_0^t f(x)dx\leftrightarrow\frac{1}{p}F(p)$

微分性质 $f'(t)\leftrightarrow pF(p)-f(0)$

$f''(t)\leftrightarrow p^2F(p)-pf(0)-f'(0)$

……

$f^{(n)}(t)\leftrightarrow p^nF(p)-p^{n-1}f(0)-p^{n-2}f'(0)-\cdots-pf^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0)$

若 $f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(n-1)}(0)=0$ 则 $f^{(n)}(t)\leftrightarrow p^nF(p)$

常见函数的拉普拉斯变换

$$\delta(t) \leftrightarrow 1 \qquad u(t) \leftrightarrow \frac{1}{p} \qquad e^{kt} \leftrightarrow \frac{1}{p-k}$$

$$\sin \omega t \leftrightarrow \frac{\omega}{p^2+\omega^2} \qquad \cos \omega t \leftrightarrow \frac{p}{p^2+\omega^2} \qquad t^n \leftrightarrow \frac{n!}{p^{n+1}}$$

其余函数的拉普拉斯变换，可查拉普拉斯变换表

例题3-6 / 求 δ 函数的拉普拉斯变换

解析3-6 / 首先介绍弱导数的概念。

对在区间[a，b](可以是无限的)上给定的函数$f(t)$，如果存在一个函数$g(t)$，使得对任意一次连续可微且在端点a，b附近为零的函数 $\varphi(t)$有：

$$\int_a^b g(t)\varphi(t)dt = -\int_a^b f(t)\varphi'(t)dt$$

则称$g(t)$为$f(t)$的弱导数，记为$f'(t)$

根据这个定义，我们可以证 δ 函数是单位阶跃函数的弱导数。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u'(t)\varphi(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)d[u(t)] \Longrightarrow u(t)\varphi(t)\Big|_a^b - \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)\varphi'(t)dt$$

分部积分

由于$\varphi(t)$在端点a，b附近为零，故 $u(t)\varphi(t)\Big|_a^b = 0,\quad \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)\varphi'(t)dt = \int_0^{+\infty} \varphi'(t)dt = -\varphi(0)$

$\therefore \int_{-\infty}^{+\infty} u'(t)\varphi(t)dt = \varphi(0)$ 其中 $\varphi(t)$为 $[+\infty, -\infty]$内任意一次连续可微且在某个有界闭区间外为0的函数

例题3-6 求δ函数的拉普拉斯变换

解析3-6

$$\therefore \int_{-\infty}^{+\infty} u'(t)\varphi(t)dt = \varphi(0)$$

δ函数定义 $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\varphi(t)dt = \varphi(0)$ 故： $u'(t) = \delta(t)$

$\therefore$根据拉普拉斯变换的微分性质： $\mathscr{L}[\delta(t)] = \mathscr{L}\left[u'(t)\right] = p \cdot \mathscr{L}[u(t)] - u(0) = p \cdot \dfrac{1}{p} = 1$

积分变换法举例

小节1 / 积分变换法举例

积分变换法举例

小节1 / 积分变换法举例

积分变换法举例

傅里叶变换常应用于无界的初值问题（针对空间变量居多）

拉普拉斯变换常应用于带边界条件的定解问题（针对时间变量居多，且多为因果函数）

本节我们将通过两道例题来介绍积分变换法的应用。

例题3-7 利用积分变换法求解定解问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad -\infty < x < +\infty \\ u\Big|_{t=0} = \varphi(x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

解析3-7 记： $U(\omega,t)=\int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)e^{-i\omega x}dx \quad \Phi(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)e^{-i\omega x}dx \quad \Psi(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)e^{-i\omega x}dx$

对方程和初始条件关于x做傅立叶变换，得：
$$\begin{cases} \dfrac{d^2U(\omega,t)}{dt^2} = -a^2\omega^2 U(\omega,t) \\ U|_{t=0} = \Phi(\omega) \quad \dfrac{dU(\omega,t)}{dt}\Big|_{t=0} = \Psi(\omega) \end{cases}$$

方程的通解为： $U(\omega,t)=A(\omega)e^{ia\omega t}+B(\omega)e^{-ia\omega t}$ 只对t求，与 ω无关，故应保留 ω

利用初始条件
$$\begin{cases} U(\omega,t)\Big|_{t=0} = A(\omega)+B(\omega)=\Phi(\omega) \\ \dfrac{dU(\omega,t)}{dt}\Big|_{t=0} = ia\omega[A(\omega)-B(\omega)]=\Psi(\omega) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A(\omega)=\dfrac{1}{2}\left[\Phi(\omega)+\dfrac{\Psi(\omega)}{ia\omega}\right] \\ B(\omega)=\dfrac{1}{2}\left[\Phi(\omega)-\dfrac{\Psi(\omega)}{ia\omega}\right] \end{cases}$$

例题3-7 利用积分变换法求解定解问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad -\infty < x < +\infty \\ u\Big|_{t=0} = \varphi(x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

解析3-7 故： $U(\omega,t) = \dfrac{1}{2}[\Phi(\omega) + \dfrac{\Psi(\omega)}{ia\omega}]e^{ia\omega t} + \dfrac{1}{2}[\Phi(\omega) - \dfrac{\Psi(\omega)}{ia\omega}]e^{-ia\omega t}$

$$= \frac{1}{2}\Phi(\omega)e^{ia\omega t} + \frac{1}{2}\Phi(\omega)e^{-ia\omega t} + \frac{1}{2a\omega i}\Psi(\omega)e^{ia\omega t} - \frac{1}{2a\omega i}\Psi(\omega)e^{-ia\omega t}$$

根据傅立叶变换的位移性质与微分性质

$$\mathscr{F}[\varphi(x+at)] = \Phi(\omega)e^{ia\omega t}$$

$$\mathscr{F}[\varphi(x-at)] = \Phi(\omega)e^{-ia\omega t}$$

$$\mathscr{F}\left[\int_0^x \psi(\xi)d\xi\right] = \frac{1}{i\omega}\Psi(\omega)$$

且

$$\mathscr{F}\left[\int_0^{x+at} \psi(\xi)d\xi\right] = \frac{1}{i\omega}\Psi(\omega)e^{i\omega at}$$

$$\mathscr{F}\left[\int_0^{x-at} \psi(\xi)d\xi\right] = \frac{1}{i\omega}\Psi(\omega)e^{-i\omega at}$$

时移性质

例题3-7 利用积分变换法求解定解问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & -\infty < x < +\infty \\ u\Big|_{t=0} = \varphi(x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

解析3-7 故对 $U(\omega, t)$ 的 ω 取傅立叶逆变换，得：

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\varphi(x+at) + \frac{1}{2}\varphi(x-at) + \frac{1}{2a}\int_0^{x+at}\psi(\xi)d\xi - \frac{1}{2a}\int_0^{x-at}\psi(\xi)d\xi$$

$$= \frac{1}{2}[\varphi(x+at) + \varphi(x-at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi$$

即达朗贝尔公式

例题3-8 设 $x>1$，$y>0$，利用积分变换法求解定解问题。

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = x^2 y \\ u\Big|_{y=0} = x^2 \\ u\Big|_{x=1} = \cos y \end{cases}$$

解析3-8 法一：对方程两端积分可得其通解，先对y积分 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x^2 y^2}{2} + \psi_0(x)$

再对x积分 $u(x,y) = \frac{x^3 y^2}{6} + \int \varphi_0(x)dx + \varphi_2(y)$

$$= \frac{x^3 y^2}{6} + \varphi_1(x) + \varphi_2(y)$$

由 $\begin{cases} u|_{y=0} = \varphi_1(x) + \varphi_2(0) = x^2 \\ u|_{x=1} = \varphi_1(1) + \varphi_2(y) + \frac{y^2}{6} = \cos y \end{cases}$ 解得：$\varphi_2(y) = \cos y - \frac{y^2}{6} - \varphi_1(1)$ 且 $\varphi_1(1) = 1 - \varphi_2(0)$

$\therefore \varphi_2(y) = \cos y - \frac{y^2}{6} - 1 + \varphi_2(0)$ 且 $\varphi_1(x) = x^2 - \varphi_2(0)$

代入 $u(x,y)$ 则：$u(x,y) = \frac{x^2 y^2}{6} + x^2 + \cos y - \frac{y^2}{6} - 1$

例题3-8 设 $x>1$, $y>0$，利用积分变换法求解定解问题。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = x^2 y \\ u\Big|_{y=0} = x^2 \\ u\Big|_{x=1} = \cos y \end{cases}$$

解析3-8 法二：记 $U(x,p)$ 是 $u(x,y)$ 关于y的拉普拉斯变换，即 $U(x,p)=\int_0^{+\infty} u(x,y)e^{-py}dy$

方程 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = x^2 y$ 对y取拉普拉斯变换，并利用微分性质得：

$$p\mathscr{L}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right] - \left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]\Bigg|_{y=0} = \frac{x^2}{p^2}$$

由 $u|_{y=0}=x^2$ 得 $\dfrac{\partial u}{\partial x}\Bigg|_{y=0} = 2x$

故 $p\mathscr{L}\left[\dfrac{\partial u}{\partial x}\right] - 2x = \dfrac{x^2}{p^2}$

由 $u|_{x=1} = cosy$ 故 $U(1,p) = \dfrac{p}{p^2+1}$

例题3-8 设 $x>1$，$y>0$，利用积分变换法求解定解问题。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=x^2y \\ u\Big|_{y=0}=x^2 \\ u\Big|_{x=1}=\cos y \end{cases}$$

解析3-8 法二： $p\mathscr{L}\left[\dfrac{\partial u}{\partial x}\right]-2x=\dfrac{x^2}{p^2}$ $\qquad U(1,p)=\dfrac{p}{p^2+1}$

解得：
$$\begin{cases} U(x,p)=\int\left(\frac{x^2}{p^3}+\frac{2x}{p}\right)dx=\frac{x^3}{3p^3}+\frac{x^2}{p}+C \\ U(1,p)=\frac{p}{p^2+1}=\frac{1}{3p^3}+\frac{1}{p}+C \qquad C=\frac{p}{p^2+1}-\frac{1}{3p^3}-\frac{1}{p} \end{cases}$$

$$\therefore U(x,p)=\frac{x^3}{3p^3}+\frac{x^2}{p}+\frac{p}{p^2+1}-\frac{1}{3p^3}-\frac{1}{p}$$

取反变换： $u(x,y)=\dfrac{x^3y^2}{6}+x^2+\cos y-\dfrac{y^2}{6}-1$

补充： $y^n\leftrightarrow\dfrac{n!}{p^{n+1}}$ 则 $y^2\leftrightarrow\dfrac{2}{p^3}$ $\quad y\leftrightarrow\dfrac{1}{p^2}$

$\cos y\leftrightarrow\dfrac{p}{p^2+1}$

行波法与积分变换法

斐哥课堂+ Phaedo Classes 数学物理方程 不挂科 第3讲