分离变量法

斐哥课堂+ Phaedo Classes 数学物理方程 不挂科 第2讲

3大模块

4道题目

分离变量法

模块1 / 分离变量法的一般步骤

模块2 / 非齐次方程的求解

模块3 / 非齐次边界条件的处理

分离变量法的一般步骤

分离变量法的一般步骤

小节1 / 有界弦的自由振动

小节2 / 三角函数系的积分正交性

小节3 / 解题步骤小结

有界弦的自由振动

讨论两端固定的弦的自由振动，就归结为求解下列定解问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ , 0 < x < l \ , t > 0 & (2.1) \\ u\Big|_{x=0} = 0 \ , u\Big|_{x=l} = 0 \ , t > 0 & (2.2) \\ u\Big|_{t=0} = \varphi(x) \ , \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x) \ , 0 \le x \le l & (2.3) \end{cases}$$

$\Rightarrow$

偏微分方程（齐次）
第一类边界条件（齐次）
初值条件

根据第一讲中的叠加原理，我们给出求解这一类问题的基本思路：

(1) 先求齐次方程(2.1)满足齐次边界条件(2.2)的足够多个非零特解。其中，特解的形式是**变量分离**的形式；

(2) 将这些特解通过线性组合叠加，使之满足初值条件(2.3)。

有界弦的自由振动

我们设分离变量形式的非零解为 $u(x,t)=X(x)T(t)$

其中$X(x)$与$T(t)$分别是仅与 x 和仅与 t 有关的函数，即变量分离。

因此我们有如下关系式：$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=X''(x)T(t)$ $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=X(x)T''(t)$

代入方程(2.1)，得$X(x)T''(t)=a^2X''(x)T(t)$

整理，得 $\dfrac{X''(x)}{X(x)}=\dfrac{T''(t)}{a^2T(t)}$，并且令 $\dfrac{X''(x)}{X(x)}=\dfrac{T''(t)}{a^2T(t)}=-\lambda$

从而我们可以得到两个一元函数的常微分方程：$T''(t)+\lambda a^2T(t)=0 \quad (2.4)$ $X''(x)+\lambda X(x)=0 \quad (2.5)$

有界弦的自由振动

再根据边界条件(2.2)，我们有 $u\Big|_{x=0} = X(0)T(t) = 0$, $u\Big|_{x=l} = X(l)T(t) = 0$

我们要求的是齐次方程符合齐次边界条件的非零特解，因此$T(t)$不可能恒为0

$\therefore X(0) = X(l) = 0 \quad (2.6)$

接下来我们求解下列常微分方程的边值问题，即先求解$X(x)$：

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases}$$

我们同样要求的是方程的非零解，此时我们要确定当λ如何取值时，方程才有满足对应边值条件的非零解，并求之，这称为常微分方程(2.5)在边值条件(2.6)下的特征值问题，方程有非零解时的λ称为此问题的特征值，对应的非零解称为其特征函数。

有界弦的自由振动

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 & (2.5) \\ X(0) = X(l) = 0 & (2.6) \end{cases}$$

我们要对参数 λ 进行讨论：

（1）当参数$\lambda < 0$ 时，微分方程(2.5)的通解为$X(x) = Ae^{\sqrt{-\lambda}x} + Be^{-\sqrt{-\lambda}x}$

代入边界条件(2.6)，可得 $X(0) = A + B = 0 \quad X(l) = Ae^{\sqrt{-\lambda}l} + Be^{-\sqrt{-\lambda}l} = 0$

解之，可得 $A = B = 0 \quad \Rightarrow \quad X(x) \equiv 0$

（2）当参数 $\lambda = 0$ 时，微分方程(2.5)的通解为$X(x) = Ax + B$

代入边界条件(2.6)，可得 $X(0) = B = 0 \quad X(l) = Al = 0$

解之，可得 $A = B = 0 \quad \Rightarrow \quad X(x) \equiv 0$

上述两种情况中，$X(x)$均为零解，因此舍去$\lambda \leq 0$ 的情形

有界弦的自由振动

(3) 当参数$\lambda > 0$ 时，令$\lambda = \beta^2$ ，微分方程(2.5)的通解为 $X(x) = A\cos\beta x + B\sin\beta x$

代入边界条件(2.6)，可得$X(0) = A = 0 \quad X(l) = B\sin\beta l = 0$

其中B不可为零，否则方程的解恒为零，因此$\sin\beta l = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta = \dfrac{n\pi}{l} \quad (n = 1,2,3,\cdots)$,$\lambda = \dfrac{n^2\pi^2}{l^2}$

因此，我们求出了特征值 $\lambda = \dfrac{n^2\pi^2}{l^2}$ 与对应的特征函数$X_n(x) = B_n\sin\dfrac{n\pi}{l}x \quad n = 1,2,3\cdots$

有界弦的自由振动

在确定了特征值λ 之后，我们再来求解函数$T(t)$：

通过先前的推导，我们有 $T''(t)+\lambda a^2T(t)=0 \quad (2.4)$

将$\lambda=\dfrac{n^2\pi^2}{l^2}(n=1,2,3,\cdots)$ 代入方程(2.4)，可得 $T_n''(t)+\dfrac{a^2n^2\pi^2}{l^2}T_n(t)=0$

解之，可得 $T_n(t)=C_n'\cos\dfrac{n\pi at}{l}+D_n'\sin\dfrac{n\pi at}{l} \ (n=1,2,3,\cdots)$

又由$X_n(x)=B_n\sin\dfrac{n\pi}{l}x \quad n=1,2,3\cdots$ 可求出任意变量分离的特解为

$$\boxed{\begin{aligned} u_n(x,t)&=X_n(x)T_n(t)\\ &=(C_n'\cos\frac{n\pi at}{l}+D_n'\sin\frac{n\pi at}{l})B_n\sin\frac{n\pi x}{l}\\ &=\underline{(C_n\cos\frac{n\pi a}{l}t+D_n\sin\frac{n\pi a}{l}t)}\underline{\sin\frac{n\pi}{l}x} \end{aligned}}$$

$C_n=B_nC_n' \quad D_n=B_nD_n'$

变量得以分离

至此，我们完成了第一步工作，即求齐次方程(2.1)满足齐次边界条件(2.2)的足够多个非零特解

有界弦的自由振动

下面我们将这些特解通过线性组合叠加，使之满足初始条件(2.3)。

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\cos\frac{n\pi a}{l}t+D_n\sin\frac{n\pi a}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

又由叠加原理，若等式右侧的无穷级数收敛，且关于 x 与 t 均可以逐项微分两次，则其和函数$u(x,t)$也满足方程(2.1)与(2.2)，现在我们确定等式右侧级数的系数，使和函数满足初值条件(2.3)。

根据初值条件(2.3)可得：$u(x,t)\Big|_{t=0}=u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\frac{n\pi}{l}x=\varphi(x)$

$$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\sum_{n=1}^{\infty}D_n\frac{n\pi a}{l}\sin\frac{n\pi}{l}x=\psi(x)$$

由于 $\varphi(x)$，$\psi(x)$ 均为定义在闭区间[0, l]上的函数，因此只需要选取 C_n 为 $\varphi(x)$ 的傅里叶正弦级数展开式系数，$D_n\frac{n\pi a}{l}$ 为 $\psi(x)$ 的傅里叶正弦级数展开式系数即可。

有界弦的自由振动

将系数 $C_n=\dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx \quad D_n=\dfrac{2}{n\pi a}\int_0^l\psi(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx$

代入$u(x,t)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(C_n\cos\frac{n\pi a}{l}t+D_n\sin\frac{n\pi a}{l}t)\sin\frac{n\pi}{l}x$

即可求得原定解问题的解。

关于分离变量法的几点说明

1、在确定系数后，按照叠加原理我们本应该还要验证得到的级数收敛并关于 x 与 t 均可以逐项微分两次，为了满足这样的条件，我们只需要对$\varphi(x)$，$\psi(x)$ 附加一些基本条件即可（此处从略）。

2、若$\varphi(x)$，$\psi(x)$不满足附加条件时，根据分离变量法所确定的解不具备古典解的要求，此时这个解只是原定解问题的一个形式解。在一般情形下，我们对于偏微分方程的求解，也都是先求出形式解，再在一定的条件下验证这个形式解就是古典解，这个验证过程称为综合工作。

由于内容篇幅限制，今后，我们都不进行综合工作，也不逐个讨论所求的形式解就是古典解所需要附加的条件，即只要求得形式解，我们就认为定解问题得到了解决。

分离变量法的一般步骤

小节1 / 有界弦的自由振动

小节2 / 三角函数系的积分正交性

小节3 / 解题步骤小结

三角函数系的积分正交性

三角函数系 $\{\sin\frac{n\pi}{l}x\}_{n=1,2,3,\cdots}$ 在闭区间$[0,l]$上为正交系，此时 $\int_0^l \sin\frac{m\pi}{l}x\cdot\sin\frac{n\pi}{l}xdx=\begin{cases}\frac{l}{2} & m=n\\ 0, & m\neq n\end{cases}$

将 $\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\frac{n\pi}{l}x$ 改写为 $\varphi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}C_k\sin\frac{k\pi}{l}x$

两边同时乘以$\sin\frac{n\pi}{l}x$，并在闭区间$[0,l]$上积分，可得

$$\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx=\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^l C_k\sin\frac{k\pi}{l}x\cdot\sin\frac{n\pi}{l}xdx=C_n\frac{l}{2}$$ 因此系数 $C_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx \quad n=1,2,3,\cdots$

将 $\psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}D_n\frac{n\pi a}{l}\sin\frac{n\pi}{l}x$ 改写为 $\psi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}D_k\frac{k\pi a}{l}\sin\frac{k\pi}{l}x$

两边同时乘以$\sin\frac{n\pi}{l}x$ ，并在闭区间$[0,l]$上积分，可得

$$\int_0^l\psi(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx=\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^l D_k\frac{k\pi a}{l}\sin\frac{k\pi}{l}x\cdot\sin\frac{n\pi}{l}xdx=D_n\frac{n\pi a}{l}\frac{l}{2}$$ 因此系数 $D_n=\frac{2}{n\pi a}\int_0^l\psi(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx$

分离变量法的一般步骤

解题步骤小结

(1) 先求齐次方程满足齐次边界条件的足够多个非零特解，即确定特征值与特征函数，其中，特解的形式是变量分离的形式；

(2) 将特解通过线性组合叠加，使之满足初值条件，并利用正交性确定系数。

这类方法从分离变量到确定特征值与特征函数的步骤是大同小异的，只是随着方程与边界条件类型的不同，特征值与特征函数会有所不同，可以解决多数“齐次线性偏微分方程 + 齐次边界条件”的问题，计算难点则在于利用正交性确定叠加后级数的系数。

例题2-1 / 求解定解问题
$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 10000 \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ 0 < x < 10, \ t > 0 \\ u\Big|_{x=0} = 0, \ u\Big|_{x=10} = 0, \ t > 0 \\ u\Big|_{t=0} = \dfrac{x(10-x)}{1000}, \ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0, \ 0 \le x \le 10 \end{cases}$$

解析2-1 / 该定解问题符合“齐次波动方程+第一类齐次边界条件”的形式

因此我们可以直接利用刚刚得出的结论进行求解。

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \cos \frac{n\pi a}{l} t + D_n \sin \frac{n\pi a}{l} t) \sin \frac{n\pi}{l} x$$

我们容易知道 $l = 10$, $a = 100$

则有 $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \cos 10n\pi t + D_n \sin 10n\pi t) \sin \dfrac{n\pi}{l} x$

例题2-1 / 求解定解问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 10000 \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ , } 0 < x < 10 \text{ , } t > 0 \\ u\Big|_{x=0} = 0 \text{ , } u\Big|_{x=10} = 0 \text{ , } t > 0 \\ u\Big|_{t=0} = \dfrac{x(10-x)}{1000} \text{ , } \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0 \text{ , } 0 \le x \le 10 \end{cases}$$

解析2-1 / $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \cos 10n\pi t + D_n \sin 10n\pi t) \sin \frac{n\pi}{l} x$

根据级数系数的公式 $C_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx \quad D_n = \frac{2}{n\pi a}\int_0^l \psi(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx$

且 $\varphi(x) = \frac{x(10-x)}{1000}$,$\psi(x) = 0$, $0 \le x \le 10$

则: $C_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx$

$$= \frac{2}{10}\int_0^{10} \frac{x(10-x)}{1000} \sin \frac{n\pi}{10} x dx$$

$$= \frac{1}{5000}\int_0^{10} x(10-x) \sin \frac{n\pi}{10} x dx$$

$$D_n = \frac{2}{n\pi a}\int_0^l \psi(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx = 0$$

例题2-1 / 求解定解问题
$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 10000 \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,,\ 0 < x < 10\,,\ t > 0 \\ u\Big|_{x=0} = 0\,,\ u\Big|_{x=10} = 0\,,\ t > 0 \\ u\Big|_{t=0} = \dfrac{x(10-x)}{1000}\,,\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0\,,\ 0 \le x \le 10 \end{cases}$$

解析2-1 / 我们利用分部积分的表格法求解定积分$\displaystyle\int_0^{10} x(10-x)\sin\frac{n\pi}{10}x dx$

求导	$x(10-x)$	$10-2x$	-2	0	
	$+$	$-$	$+$	$-\int$	
积分	$\sin\dfrac{n\pi}{10}x$	$-\dfrac{10}{n\pi}\cos\dfrac{n\pi}{10}x$	$-(\dfrac{10}{n\pi})^2\sin\dfrac{n\pi}{10}x$	$(\dfrac{10}{n\pi})^3\cos\dfrac{n\pi}{10}x$	

$$\int_0^{10} x(10-x)\sin\frac{n\pi}{10}x dx$$
$$= \left[-x(10-x)\frac{10}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{10}x + (10-2x)(\frac{10}{n\pi})^2\sin\frac{n\pi}{10}x - 2(\frac{10}{n\pi})^3\cos\frac{n\pi}{10}x\right]_0^{10}$$
$$= 2(\frac{10}{n\pi})^3(1-\cos n\pi)$$

故 $C_n = \dfrac{2}{5n^3\pi^3}(1-\cos n\pi)$

例题2-1 求解定解问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 10000 \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ 0 < x < 10, \ t > 0 \\ u\Big|_{x=0} = 0, \ u\Big|_{x=10} = 0, \ t > 0 \\ u\Big|_{t=0} = \dfrac{x(10-x)}{1000}, \ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0, \ 0 \le x \le 10 \end{cases}$$

解析2-1

$$C_n = \frac{2}{5n^3\pi^3}(1-\cos n\pi) = \begin{cases} 0 & n\text{为偶数} \\ \dfrac{4}{5n^3\pi^3} & n\text{为奇数} \end{cases} \qquad D_n = 0$$

因此，我们所求的解为 $u(x,t) = \dfrac{4}{5\pi^3}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)^3}\cos 10(2n+1)\pi t \sin\dfrac{(2n+1)\pi}{10}x$

例题2-2 / 求解定解问题：
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, \quad 0 < x < 1\,,\ t > 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0\,,\ u\Big|_{x=1} = 0\,,\ t > 0 \\ u\Big|_{t=0} = \cos(\frac{\pi x}{2}) \quad 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

解析2-2 / 该定解问题为“齐次波动方程+第二类齐次边界条件”的形式

因此，特征值与对应的特征函数较之前的讨论会有所不同，我们重新进行分离变量的分析。

设分离变量形式的非零解为 $u(x,t) = X(x)T(t)$ 代入波动方程并整理，得 $\dfrac{X''(x)}{X(x)} = \dfrac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda$

从而我们可以得到两个一元函数的常微分方程：

$T'(t) + \lambda T(t) = 0 \qquad X''(x) + \lambda X(x) = 0$

再根据本题的边界条件，我们有 $\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = X'(0)T(t) = 0\,,\ u\Big|_{x=1} = X(1)T(t) = 0\,,\ t > 0$

因为$T(t)$不可能恒为0，所以 $X'(0) = X(1) = 0$

例题2-2 / 求解定解问题：
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < 1, t > 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0, \ u\Big|_{x=1} = 0, & t > 0 \\ u\Big|_{t=0} = \cos(\frac{\pi x}{2}) & 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

解析2-2 / 接下来我们求解下列特征值问题，即先求解$X(x)$：$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X'(0) = X(1) = 0 \end{cases}$

重复对特征值的讨论（具体讨论见前文）当参数 $\lambda > 0$ 时，令 $\lambda = \beta^2$，微分方程的通解为

$X(x) = A\cos\beta x + B\sin\beta x$

代入边界条件，可得 $X'(0) = B\beta = 0$　$\beta \neq 0 \to B = 0$　$X(1) = A\cos\beta = 0$

其中A不可为零，否则方程的解恒为零，因此 $\cos\beta = 0$ $\Rightarrow$ $\beta = \dfrac{\pi}{2} + n\pi$ $(n = 0,1,2,\cdots)$,$\beta = \dfrac{(2n+1)\pi}{2}$

因此特征值 $\lambda = \dfrac{(2n+1)^2\pi^2}{4}$ ，特征函数 $X_n(x) = A_n\cos\dfrac{(2n+1)\pi}{2}x$

在确定了特征值λ之后，我们再来求解函数$T(t)$， 通过先前的推导，我们有 $T'(t) + \lambda T(t) = 0$

将 $\lambda = \dfrac{(2n+1)^2\pi^2}{4}$ 代入方程，可得 $T_n'(t) + \dfrac{(2n+1)^2\pi^2}{4}T_n(t) = 0$

解之，可得 $T_n(t) = C_n e^{-(\frac{2n+1}{2}\pi)^2 t}$

例题2-2 求解定解问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < 1,\ t > 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0,\ u\Big|_{x=1} = 0,\ t > 0 \\ u\Big|_{t=0} = \cos(\frac{\pi x}{2}) & 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

解析2-2 可求出任意变量分离的特解为

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t)$$

$$= D_n e^{-(\frac{2n+1}{2}\pi)^2 t} \cos\frac{(2n+1)\pi}{2}x \qquad D_n = A_n C_n$$

将这些特解通过线性组合叠加，使之满足初始条件。

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n e^{-(\frac{2n+1}{2}\pi)^2 t} \cos\frac{(2n+1)\pi}{2}x$$

根据初值条件： $u\Big|_{t=0} = \sum_{n=0}^{\infty} D_n \cos(\frac{2n+1}{2}\pi x) = \cos(\frac{\pi x}{2})$

此时可以通过对比方程两端确定系数，无需利用正交性求积分！

对比方程两端，易得 $D_0 = 1$, $D_n = 0\ (n \neq 0)$

因此可求得 $u(x,t) = e^{-\frac{\pi^2}{4}t} \cos\frac{\pi}{2}x$

非齐次方程的求解

小节1 / 非齐次方程的求解

非齐次方程的求解

我们之前所讨论的偏微分方程都是齐次的，现在我们分析非齐次方程的求解方法，我们以弦的强迫振动为例，所采用的方法也可以应用到其他类型的方程中去。

我们研究的问题是一根弦在两端固定的情况下受强迫力作用所产生的振动现象，即下列定解问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \ , \ 0 < x < l \ , \ t > 0 \\ u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=l} = 0 \ , \ t > 0 \\ u\Big|_{t=0} = \varphi(x) \ , \ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x) \ , \ 0 \le x \le l \end{cases}$$

此时的振动是由两个因素所造成的：强迫力和初始状态。

因此可以将振动视为仅由强迫力引起的振动与仅由初始状态引起的振动的合成，即对振动进行分解。

非齐次方程的求解

因此我们设解为$u(x,t) = V(x,t) + W(x,t)$

其中$V(x,t)$是仅由**强迫力**引起的振动的位移，满足

（此时初始状态为0，可类比零状态响应）

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 V}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \boxed{f(x,t)}, \ 0 < x < l \ , \ t > 0 \\ V\Big|_{x=0} = 0 \ , \ V\Big|_{x=l} = 0 \ , \ t > 0 \\ \boxed{V\Big|_{t=0} = \dfrac{\partial V}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0 \ , \ 0 \le x \le l} \end{cases}$$

$W(x,t)$ 是仅由**初始状态**引起的振动的位移，满足

（此时激励为0，可类比零输入响应）

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 W}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 W}{\partial x^2} \ , \ 0 < x < l \ , \ t > 0 \\ W\Big|_{x=0} = 0 \ , \ W\Big|_{x=l} = 0 \ , \ t > 0 \\ \boxed{W\Big|_{t=0} = \varphi(x) \ , \ \dfrac{\partial W}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x) \ , \ 0 \le x \le l} \end{cases}$$

$W(x,t)$ 满足“齐次方程+齐次边界条件”，可以直接通过分离变量法求解，在这里略去过程。

$V(x,t)$ 的求解是本节的重点，我们重点介绍**特征函数法。**

非齐次方程的求解

在求解线性非齐次微分方程时，我们有参数变易法，在这里我们可以采用类似的方法，并作如下假设：

假设非齐次定解问题
$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 V}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} + f(x,t)\ ,\ 0 < x < l\ ,\ t > 0 \\ V\Big|_{x=0} = 0\ ,\ V\Big|_{x=l} = 0\ ,\ t > 0 \\ V\Big|_{t=0} = \dfrac{\partial V}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0\ ,\ 0 \le x \le l \end{cases}$$
的解可以分解为无穷多个驻波的叠加

而每个驻波的波形仍然由**对应的齐次方程通过分离变量法所得的特征值与特征函数**所确定。

根据2.1的内容，齐次定解问题
$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 V}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}\ ,\ 0 < x < l\ ,\ t > 0 \\ V\Big|_{x=0} = 0\ ,\ V\Big|_{x=l} = 0\ ,\ t > 0 \\ V\Big|_{t=0} = \dfrac{\partial V}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0\ ,\ 0 \le x \le l \end{cases}$$
的特征函数系为 $\{\sin\dfrac{n\pi}{l}x\}\quad n = 1,2,3\cdots$

因此，非齐次定解问题的解应满足：$V(x,t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} v_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x$

非齐次方程的求解

为了确定参数变易后的$v_n(t)$，我们将非齐次方程的自由项，即强迫力$f(x,t)$也按照特征函数系展开

$$f(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

根据特征函数系的正交性，$f_n(t)=\dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l f(x,t)\sin\frac{n\pi}{l}xdx$

将 $V(x,t)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} v_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x$ 以及 $f(x,t)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x$ 代入 $\dfrac{\partial^2 V}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}+f(x,t)$ 并整理，得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[v_n''(t)+\frac{a^2n^2\pi^2}{l^2}v_n(t)-f_n(t)\right]\sin\frac{n\pi}{l}x\equiv 0$$

因此 $v_n''(t)+\dfrac{a^2n^2\pi^2}{l^2}v_n(t)=f_n(t)$，再将$V(x,t)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} v_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x$ 代入初值条件，有 $v_n(0)=v_n'(0)=0$

因此确定$v_n(t)$ 就需要求解线性非齐次微分方程的初值问题 $\begin{cases} v_n''(t)+\dfrac{a^2n^2\pi^2}{l^2}v_n(t)=f_n(t) \\ v_n(0)=v_n'(0)=0 \end{cases}$

非齐次方程的求解

因此确定$v_n(t)$就需要求解线性非齐次微分方程的初值问题 $\begin{cases} v_n''(t)+\dfrac{a^2n^2\pi^2}{l^2}v_n(t)=f_n(t) \\ v_n(0)=v_n'(0)=0 \end{cases}$

我们在方程 $v_n''(t)+\dfrac{a^2n^2\pi^2}{l^2}v_n(t)=f_n(t)$ 的两端同时取拉普拉斯变换（提前引入，具体性质详见后续课程）

可得 $p^2V_n(p)+\dfrac{a^2n^2\pi^2}{l^2}V_n(p)=F_n(p)$，因此$V_n(p)=\dfrac{1}{p^2+\frac{n^2a^2\pi^2}{l^2}}F_n(p)$

已知 $\dfrac{1}{p^2+\frac{n^2a^2\pi^2}{l^2}} \leftrightarrow \dfrac{l}{n\pi a}\sin\dfrac{n\pi a}{l}t$，根据该拉普拉斯变换对以及拉普拉斯变换的卷积性质，我们可以求得

$$v_n(t)=[\frac{l}{n\pi a}\sin\frac{n\pi a}{l}t]*f_n(t)=\frac{l}{n\pi a}\int_0^t f_n(\tau)\sin\frac{n\pi a(t-\tau)}{l}d\tau$$

因此 $V(x,t)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{l}{n\pi a}\int_0^t f_n(\tau)\sin\frac{n\pi a(t-\tau)}{l}d\tau]\sin\frac{n\pi}{l}x$，把它和通过分离变量法求得的$W(x,t)$加起来即可。

非齐次方程的求解「本讲小结」

1. 将非齐次方程对应的解分解为初始状态为零的非齐次方程（零状态响应），以及保留初始状态的齐次方程（零输入响应）两部分；

2. 保留初始状态的齐次方程（零输入响应）部分可以通过分离变量法求解；

3. 初始状态为零的非齐次方程（零状态响应）部分可以通过特征函数法求解：

（1）将该非齐次方程的自由项和解都按照非齐次方程对应的齐次方程的特征函数系进行展开；

(非齐次方程对应的齐次方程的特征函数系可以通过分离变量法确定)

（2）将展开后的自由项和解代入非齐次方程，求解新的定解问题（参数变易法，拉氏变换法）；

4. 将求得的两个解相叠加即可求得对应的全解。

非齐次边界条件的处理

小节1 / 非齐次边界条件的处理

非齐次边界的处理

我们之前求解的定解问题均满足齐次边界条件，如果遇到非齐次边界条件，我们需要通过进行适当的函数代换，将非齐次边界条件进行齐次化处理。基本思路是，选取一个适当的未知函数之间的代换，使得对于新的未知函数，边界条件是其次的，我们以下列定解问题为例说明该方法。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)\ ,\ 0 < x < l\ ,\ t > 0 \\ u\Big|_{x=0} = u_1(t)\ ,\ u\Big|_{x=l} = u_2(t)\ ,\ t > 0 \\ u\Big|_{t=0} = \varphi(x)\ ,\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x)\ ,\ 0 \le x \le l \end{cases}$$

我们设法作一个代换，将边界条件化为齐次的，因此我们令 $u(x,t) = V(x,t) + W(x,t)$

接下来我们选取合适的$W(x,t)$，使得$V(x,t)$满足齐次边界条件，即 $V\Big|_{x=0} = V\Big|_{x=l} = 0$

此时，需满足$W\Big|_{x=0} = u_1(t)\ ,\ W\Big|_{x=l} = u_2(t)$，也就是说 $W(x,t)$ 满足这个条件就能达到我们的目的。

而满足这个条件的函数也是容易找到的，比如说我们取$W(x,t)$为关于x 的一次式，即 $W(x,t) = A(t)x + B(t)$

非齐次边界的处理

根据条件，我们有 $W\Big|_{x=0} = B(t) = u_1(t)$ $\quad W\Big|_{x=l} = A(t)l + B(t) = u_2(t)$

解得 $A(t) = \dfrac{u_2(t) - u_1(t)}{l}$ $\quad B(t) = u_1(t)$，故 $W(x,t) = \dfrac{u_2(t) - u_1(t)}{l}x + u_1(t)$ 就满足条件。

因此我们做代换 $u = V + (\dfrac{u_2 - u_1}{l}x + u_1)$，就可以使新的未知函数$V$满足齐次边界条件。

原定解问题便转化为
$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 V}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} + f_1(x,t)\ ,\ 0 < x < l\ ,\ t > 0 \\ \boxed{V\Big|_{x=0} = 0\ ,\ V\Big|_{x=l} = 0\ ,\ t > 0} \\ V\Big|_{t=0} = \varphi_1(x)\ ,\ \dfrac{\partial V}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi_1(x)\ ,\ 0 \le x \le l \end{cases}$$

非齐次边界的处理

函数的确定：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)\ ,\ 0 < x < l\ ,\ t > 0 \\ u\Big|_{x=0} = u_1(t)\ ,\ u\Big|_{x=l} = u_2(t)\ ,\ t > 0 \\ u\Big|_{t=0} = \varphi(x)\ ,\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x)\ ,\ 0 \le x \le l \end{cases}$$

$$\to (V_{tt} + W_{tt}) = a^2(V_{xx} + W_{xx}) + f(x,t)$$

$$\to V\Big|_{x=0} = V\Big|_{x=l} = 0$$

$$\to V\Big|_{t=0} + W\Big|_{t=0} = \varphi(x) \qquad (V_t + W_t)\Big|_{t=0} = \psi(x)$$

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{\partial^2 V}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} + f_1(x,t)\ ,\ 0 < x < l\ ,\ t > 0 \\ V\Big|_{x=0} = 0\ ,\ V\Big|_{x=l} = 0\ ,\ t > 0 \\ V\Big|_{t=0} = \varphi_1(x)\ ,\ \dfrac{\partial V}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi_1(x)\ ,\ 0 \le x \le l \end{cases}}$$

$$f_1(x,t) = f(x,t) + a^2 W_{xx} - W_{tt} = f(x,t) - [\frac{u_2''(t) - u_1''(t)}{l}x + u_1''(t)]$$

$$\varphi_1(x) = \varphi(x) - W(x,0) = \varphi(x) - [\frac{u_2(0) - u_1(0)}{l}x + u_1(0)]$$

$$\psi_1(x) = \psi(x) - W_t(x,0) = \psi(x) - [\frac{u_2'(0) - u_1'(0)}{l}x + u_1'(0)]$$

$\downarrow$

求得 $V(x,t)$ $\rightarrow$ 根据函数代换关系 $u = V + (\frac{u_2 - u_1}{l}x + u_1)$ 求得最终解

非齐次边界的处理

- **思考题（请大家自行完成）**

请在如下的边界条件中对一维波动方程 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)$, $0 < x < l$, $t > 0$ 进行边界条件齐次化，并写出对应的$W(x,t)$的表达式。

- **1.** $u\Big|_{x=0} = u_1(t)$, $\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l} = u_2(t)$, $t > 0$
- **2.** $\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = u_1(t)$, $u\Big|_{x=l} = u_2(t)$, $t > 0$
- **3.** $\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = u_1(t)$, $\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l} = u_2(t)$, $t > 0$

非齐次边界的处理

在上述的讨论中，我们选取$W(x,t)$为关于x的一次式，是为了使所需确定的新函数的表达式相对简单，且$W(x,t)$的确定也相对简单。但需要求解非齐次方程，过程比较繁杂。

★ 如果在定解问题
$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)\ ,\ 0 < x < l\ ,\ t > 0 \\ u\Big|_{x=0} = u_1(t)\ ,\ u\Big|_{x=l} = u_2(t)\ ,\ t > 0 \\ u\Big|_{t=0} = \varphi(x)\ ,\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x)\ ,\ 0 \le x \le l \end{cases}$$
中，f, u_1, u_2都与t无关，则可以选取适当的$W(x)$

（此时$W(x)$也和t无关），将$V(x,t)$的方程和边界条件同时齐次化，避免了求解非齐次方程的繁杂工作量。

例题2-3 不用解方程，将以下非齐次问题化为齐次问题。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \cos x \ , \ 0 < x < 1 \ , \ t > 0 \\ u\Big|_{x=0} = 1 \ , \ \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=1} = -\sin 1 \ , \ t > 0 \\ u\Big|_{t=0} = 2\cos x \ , \ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0 \ , \ 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

解析2-3 $\because$ 自由项为$\cos x$， 与t无关，边界条件也与t无关

$\therefore$ 可设：$u(x,t) = V(x,t) + W(x)$

代入方程 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \cos x$， 可以得出 $\dfrac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \cos x$

我们选取合适的$W(x)$，使关于V的方程和边界条件均齐次化

即 $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} \qquad 0 < x < 1, t > 0 \\ V\Big|_{x=0} = 0 \ , \ \dfrac{\partial V}{\partial x}\Big|_{x-1} = 0 \\ V\Big|_{t=0} = 2\cos x - W(x), \ \dfrac{\partial V}{\partial t}\Big|_{t=o} = 0 \end{cases}$， 此时需满足 $\begin{cases} W''(x) + \cos x = 0 \\ W(0) = 1 \\ W'(1) = -\sin 1 \end{cases}$

例题2-3 不用解方程，将以下非齐次问题化为齐次问题。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \cos x \ , \ 0 < x < 1 \ , \ t > 0 \\ u\Big|_{x=0} = 1 \ , \ \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=1} = -\sin 1 \ , \ t > 0 \\ u\Big|_{t=0} = 2\cos x \ , \ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0 \ , \ 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

即 $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} \qquad 0 < x < 1, t > 0 \\ V\Big|_{x=0} = 0 \ , \ \dfrac{\partial V}{\partial x}\Big|_{x-1} = 0 \\ V\Big|_{t=0} = 2\cos x - W(x), \ \dfrac{\partial V}{\partial t}\Big|_{t=o} = 0 \end{cases}$ ，此时需满足 $\begin{cases} W''(x) + \cos x = 0 \\ W(0) = 1 \\ W'(1) = -\sin 1 \end{cases}$

解析2-3

由 $W''(x) + \cos x = 0$ 可得 $W''(x) = -\cos x$

等式两端对x积分两次得 $W(x) = \cos x + c_1 x + c_2$

代入 $W(0) = 1$，$W'(1) = -\sin 1$ 可得 $c_1 = c_2 = 0$ 故选取 $W(x) = \cos x$

此时，原定解问题转化为 $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} \qquad o < x < 1, t > 0 \\ v\Big|_{x=0} = 0 \ , \ \dfrac{\partial V}{\partial x}\Big|_{x-1} = 0 \\ v\Big|_{t=0} = \cos x, \ \dfrac{\partial V}{\partial t}\Big|_{t=o} = 0 \end{cases}$

例题2-4 / 求下列定解问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A\ , 0 < x < l\ , t > 0 \\ u\Big|_{x=0} = 0\ , u\Big|_{x=l} = B\ , t > 0 \\ u\Big|_{t=0} = \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0\ , 0 \le x \le l \end{cases}$$

解析2-4 / 本题的自由项和边界条件均与t无关，故可设 $u(x,t) = W(x) + V(x,t)$

代入方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A$， 得 $\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = a^2 \left[\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right] + A$

为了使方程与边界条件同时齐次化，选取 $W(x)$ 满足

$$\begin{cases} a^2 W''(x) + A = 0 \\ W|_{x=0} = 0, \quad W|_{x=1} = B \end{cases}$$ 为二阶常系数线性非齐次常微分方程的边值问题

通过两次积分可得 $W(x) = -\frac{A}{2a^2}x^2 + C_1 x + C_2$

代入 $W\Big|_{x=0} = 0, \quad W\Big|_{x=l} = B$ 得 $W(0) = C_2 = 0,\ W(l) = -\frac{A}{2a^2}l^2 + C_1 l = B$ ， 则 $C_1 = \frac{Al}{2a^2} + \frac{B}{l}$

故 $W(x) = -\frac{A}{2a^2}x^2 + \left(\frac{Al}{2a^2} + \frac{B}{l}\right)x$

例题2-4 求下列定解问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A \text{ , } 0 < x < l \text{ , } t > 0 \\ u\Big|_{x=0} = 0 \text{ , } u\Big|_{x=l} = B \text{ , } t > 0 \\ u\Big|_{t=0} = \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0 \text{ , } 0 \le x \le l \end{cases}$$

解析2-4 因此函数 $V(x,t)$ 变为下列定解问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 V}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} \text{ , } 0 < x < l \text{ , } t > 0 \\ V\Big|_{x=0} = V\Big|_{x=l} = 0 \text{ , } t > 0 \\ V\Big|_{t=0} = -W(x) \quad \text{ , } \dfrac{\partial V}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0 \text{ , } 0 \le x \le l \end{cases}$$

根据公式2.1的讨论，方程 $\dfrac{\partial^2 V}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ 满足齐次边界条件的解为:

$$V(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n \cos \frac{n\pi a}{l} t + D_n \sin \frac{n\pi a}{l} t \right) \sin \frac{n\pi}{l} x$$

$$\therefore V|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi}{l} x = -W(x)$$

例题2-4 求下列定解问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A \text{ , } 0 < x < l \text{ , } t > 0 \\ u\Big|_{x=0} = 0 \text{ , } u\Big|_{x=l} = B \text{ , } t > 0 \\ u\Big|_{t=0} = \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0 \text{ , } 0 \le x \le l \end{cases}$$

解析2-4

$$\therefore V|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi}{l} x = -W(x)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t}\Big|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \cdot \frac{n\pi a}{l} \cos \frac{n\pi a}{l} t \sin \frac{n\pi}{t} x|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi a}{l} D_n \sin \frac{n\pi}{l} x = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi}{l} x = -W(x) = \frac{A}{2a^2} x^2 - \left(\frac{Al}{2a^2} + \frac{B}{l} \right) x$$

则 $$C_n = \frac{2}{l} \int_0^l \left[\frac{A}{2a^2} x^2 - \left(\frac{Al}{2a^2} + \frac{B}{l} \right) x \right] \sin \frac{n\pi}{l} x dx$$

$$= \frac{A}{a^2 l} \int_0^l x^2 \sin \frac{n\pi}{\tau} x dx - \left(\frac{A}{a^2} + \frac{2B}{l^2} \right) \int_0^l x \sin \frac{n\pi}{l} x dx$$

$$C_n = -\frac{2Al^2}{a^2 n^3 \pi^3} + \frac{2}{n\pi} \left(\frac{Al^2}{a^2 n^2 \pi^2} + B \right) \cos n\pi$$

例题2-4 求下列定解问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A \ , 0 < x < l \ , t > 0 \\ u\Big|_{x=0} = 0 \ , u\Big|_{x=l} = B \ , t > 0 \\ u\Big|_{t=0} = \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0 \ , 0 \le x \le l \end{cases}$$

解析2-4

$$C_n = -\frac{2Al^2}{a^2 n^3 \pi^3} + \frac{2}{n\pi}\left(\frac{Al^2}{a^2 n^2 \pi^2} + B\right)\cos n\pi$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} D_n \frac{n\pi a}{l} \sin \frac{n\pi}{l} x = 0 \Rightarrow D_n = 0$$

故原定解问题的解为

$$u(x,t) = -\frac{A}{2a^2}x^2 + \left(\frac{Al}{2a^2} + \frac{B}{l}\right)x + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[-\frac{2Al^2}{a^2 n^3 \pi^3} + \frac{2}{n\pi}\left(\frac{Al^2}{a^2 n^2 \pi^2} + B\right)(-1)^n\right]\cos \frac{n\pi a}{l} t \sin \frac{n\pi}{l} x$$

分离变量法

斐哥课堂+ Phaedo Classes 数学物理方程 不挂科 第2讲