勒让德多项式

斐哥课堂+ Phaedo Classes 数学物理方程 不挂科 第5讲

4大模块

3道题目

勒让德
多项式

勒让德方程的引出

小节1 / 勒让德方程的引出

勒让德方程的引出

小节1 / 勒让德方程的引出

勒让德方程的引出

对球坐标系中的拉普拉斯方程进行分离变量，球坐标系中的拉普拉斯方程为

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial u}{\partial r})+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta})+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0$$

设 $u(r,\theta,\varphi)=R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$ ，代入拉普拉斯方程，有：

$$\Theta\Phi\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2\frac{dR}{dr})+R\Phi\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta})+R\Theta\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}=0$$

用 $\dfrac{r^2}{R\Phi\Theta}$ 乘以上式，则有 $\dfrac{1}{R}\dfrac{d}{dr}(r^2\dfrac{dR}{dr})+\dfrac{1}{\Theta\sin\theta}\dfrac{d}{d\theta}(\sin\theta\dfrac{d\Theta}{d\theta})+\dfrac{1}{\Phi\sin^2\theta}\dfrac{d^2\Phi}{d\varphi^2}=0$

或者 $\dfrac{1}{R}\dfrac{d}{dr}(r^2\dfrac{dR}{dr})=-\dfrac{1}{\Theta\sin\theta}\dfrac{d}{d\theta}(\sin\theta\dfrac{d\Theta}{d\theta})-\dfrac{1}{\Phi\sin^2\theta}\dfrac{d^2\Phi}{d\varphi^2}$

勒让德方程的引出

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}(r^2\frac{dR}{dr})+\frac{1}{\Theta\sin\theta}\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta})+\frac{1}{\Phi\sin^2\theta}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}=0$$

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}(r^2\frac{dR}{dr})=-\frac{1}{\Theta\sin\theta}\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta})-\frac{1}{\Phi\sin^2\theta}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}$$

上式的左端仅与 r 有关，右端仅与 θ 和 φ 有关，要它们相等只有当它们均为常数时才有可能。

为了以后的需要，我们把这个常数写成 $n(n+1)$这种形式（n可能为整数，可能为复数）。

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}(r^2\frac{dR}{dr})=n(n+1) \quad \Longrightarrow \quad \boxed{r^2\frac{d^2R}{dr^2}+2r\frac{dR}{dr}-n(n+1)R=0}$$

欧拉方程

该方程为欧拉方程，其通解为 $R(r)=A_1r^n+A_2r^{-(n+1)}$，其中 A_1,A_2 为任意常数

勒让德方程的引出

$$\frac{1}{\Theta\sin\theta}\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta})+\frac{1}{\Phi\sin^2\theta}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}=-n(n+1)$$

方程两端同时乘以 $\sin^2\theta$，有 $\frac{1}{\Theta}\sin\theta\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta})+n(n+1)\sin^2\theta+\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}=0$

$$\frac{1}{\Theta}\sin\theta\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta})+n(n+1)\sin^2\theta=-\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}$$

上式的左端仅与 θ 有关，右端仅与 φ 有关，要它们相等只有当它们均为常数时才有可能。

这个常数需定义为写成 m^2（与贝塞尔方程分离变量法的讨论一致）。

$$\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}=-m^2 \quad \Longrightarrow \quad \Phi(\varphi)=B_1\cos m\varphi+B_2\sin m\varphi$$

勒让德方程的引出

$$\frac{1}{\Theta}\sin\theta\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta})+n(n+1)\sin^2\theta=m^2$$

连带的勒让德方程

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta})-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\Theta+n(n+1)\Theta=0 \Rightarrow \boxed{\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}+\cot\theta\frac{d\Theta}{d\theta}+[n(n+1)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}]\Theta=0}$$

若引用 $x=\cos\theta$ $(-1\le x\le 1)$为自变量，并将 $\Theta(\theta)$ 换为 $P(x)$，则连带的勒让德方程可变为

$$(1-x^2)\frac{d^2P}{dx^2}-2x\frac{dP}{dx}+\left[n(n+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]P=0$$

勒让德方程

若 $u(r,\theta,\varphi)$ 与 φ 无关，则 $m=0$，方程即可简化为 $\boxed{(1-x^2)\frac{d^2P}{dx^2}-2x\frac{dP}{dx}+n(n+1)P=0}$

勒让德方程的引出「本节小结」

- 勒让德方程引出的方程背景是球坐标系中的拉普拉斯方程，方法是分离变量法

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial u}{\partial r})+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta})+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0$$

- 通过分离变量法可以求得对应分离变量函数的解或有关方程

分离变量后求解欧拉方程 $r^2\frac{d^2R}{dr^2}+2r\frac{dR}{dr}-n(n+1)R=0 \longrightarrow R(r)=A_1r^n+A_2r^{-(n+1)}$

分离变量后求解常微分方程 $\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}=-m^2 \longrightarrow \Phi(\varphi)=B_1\cos m\varphi+B_2\sin m\varphi$

待求解的连带的勒让德方程 $\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}+\cot\theta\frac{d\Theta}{d\theta}+[n(n+1)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}]\Theta=0$

- 勒让德方程

$$(1-x^2)\frac{d^2P}{dx^2}-2x\frac{dP}{dx}+n(n+1)P=0$$

勒让德多项式

小节1 / 勒让德多项式

勒让德多项式

小节1 / 勒让德多项式

勒让德多项式

给出勒让德方程 $(1-x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2}-2x\dfrac{dy}{dx}+n(n+1)y=0$

在求解勒让德方程的过程中，我们省略具体的推导过程，并取n为整数（最常见的情况）；

推导得出方程的解为：

$$y=\boxed{a_0\left[1-\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\frac{n(n-2)(n+1)(n+3)}{4!}x^4+\cdots\right]} \qquad y_1$$

$$+\boxed{a_1\left[x-\frac{(n-1)(n+2)}{3!}x^3+\frac{(n-1)(n-3)(n+2)(n+4)}{5!}x^5+\cdots\right]} \qquad y_2$$

其中，a_0和a_1为任意常数，根据其任意性，可推得：

$$y_1=a_0\left[1-\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\frac{n(n-2)(n+1)(n+3)}{4!}x^4+\cdots\right]$$

$$y_2=a_1\left[x-\frac{(n-1)(n+2)}{3!}x^3+\frac{(n-1)(n-3)(n+2)(n+4)}{5!}x^5+\cdots\right]$$

两函数均为方程的解，
当 $a_0\neq 0$，$a_1\neq 0$时，它们线性无关。

勒让德多项式

$$y_1 = a_0\left[1 - \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-2)(n+1)(n+3)}{4!}x^4 + \cdots\right]$$

$$y_2 = a_1\left[x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!}x^3 + \frac{(n-1)(n-3)(n+2)(n+4)}{5!}x^5 + \cdots\right]$$

当n不为整数时，y_1与y_2均为无穷级数，可以证明它们在$-1 < x < 1$时绝对收敛，在$x = \pm 1$处发散

此时勒让德方程不可能在$x = \pm 1$处有有界解；

当n为整数时，y_1与y_2的其中一个会变为多项式，具体哪个需要通过n的取值确定，另一个仍是无穷级数；

通过推导我们可以得出这个多项式的一般形式

$$P_n(x) = \sum_{m=0}^{M}(-1)^m\frac{(2n-2m)!}{2^n m!(n-m)!(n-2m)!}x^{n-2m} \qquad M = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & n\text{为偶数} \\ \dfrac{n-1}{2} & n\text{为奇数} \end{cases}$$

这个一般形式即为我们所需要掌握的**n次勒让德多项式**

勒让德多项式「本节小结」

- **n次勒让德多项式**

$$P_n(x) = \sum_{m=0}^{M} (-1)^m \frac{(2n-2m)!}{2^n m!(n-m)!(n-2m)!} x^{n-2m} \quad M = \begin{cases} \frac{n}{2} & n\text{为偶数} \\ \frac{n-1}{2} & n\text{为奇数} \end{cases}$$

- **n次勒让德多项式的罗德里格斯（Rodrigues）表达式**

为了便于应用，我们可以将n次勒让德多项式写成

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n$$

该式称为**n次勒让德多项式的罗德里格斯（Rodrigues）表达式**

- **需要记住的几个低阶次的勒让德多项式**

$$P_0(x) = 1 \qquad P_1(x) = x \qquad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1) \qquad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3-3x)$$

勒让德多项式「本节小结」

- **勒让德方程的通解**

当n不为整数时，方程通解为 $y=y_1+y_2$ ，y_1与 y_2 由前文所讲的无穷级数所确定，它们在闭区间 $[-1,1]$ 上无界，因此方程在闭区间 $[-1,1]$ 无有界解。

当n为整数时，y_1 与 y_2 中有一个是勒让德多项式$P_n(x)$ ，另一个仍是无穷级数，记为 $Q_n(x)$，此时方程的通解为 $y=C_1P_n(x)+C_2Q_n(x)$，其中$Q_n(x)$ 成为第二类勒让德函数，它在闭区间$[-1,1]$上无界。

函数展开成勒让德多项式的级数

小节1 / 函数展开成勒让德多项式的级数

函数展开成勒让德多项式的级数

小节1 / 函数展开成勒让德多项式的级数

函数展开成勒让德多项式的级数

在应用勒让德多项式解决数学物理方程的定解问题时，需要将给定在区间 $(-1,1)$ 的函数按勒让德多项式展开为无穷级数，因此我们首先要知道不同阶次的勒让德多项式构成正交函数集，然后再进行级数展开。

- **勒让德多项式的正交性**

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = \begin{cases} 0 & , m \neq n \\ \dfrac{2}{2n+1} & , m = n \end{cases}$$

- **函数展开成勒让德多项式的级数**

设函数满足按照特征函数展开的条件，则 $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k P_k(x), (-1 < x < 1)$

为了求解系数，将上式两端同时乘以 $P_n(x)$ 并在 $(-1,1)$ 上积分，有

$$\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)dx = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \int_{-1}^{1} P_k(x)P_n(x)dx = C_n \frac{2}{2n+1}$$

故 $C_n = \dfrac{2n+1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)dx$

函数展开成勒让德多项式的级数

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}C_kP_k(x),\ (-1<x<1) \qquad C_n=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)P_n(x)dx$$

如果 $x=\cos\theta$ $(-1\le x\le 1)$，则这两个式子可以写成

$$f(\cos\theta)=\sum_{k=0}^{\infty}C_kP_k(\cos\theta),\ (0<\theta<\pi)$$

$$C_n=\frac{2n+1}{2}\int_{\pi}^{0}f(\cos\theta)P_n(\cos\theta)d(\cos\theta)=\frac{2n+1}{2}\int_{0}^{\pi}f(\cos\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta d\theta$$

常见题型总结

小节1 / 常见题型总结

常见题型总结

小节1 / 常见题型总结

常见题型总结

（1）给定函数，将其展开为关于勒让德多项式的级数

若给定多项式函数，可以直接根据最高次幂，通过待定系数法利用特殊阶次勒让德多项式进行展开，无需利用正交性求积分。

（2）利用分离变量法求解球坐标系定解问题

常见于球坐标系拉普拉斯方程的定解问题

例题5-1 / 试将函数 $f(x)=2x^3+3x+4,\ x\in(-1,1)$ 展开为勒让德多项式的级数

解析5-1 / $\because\ f(x)=2x^3+3x+4\quad x\in(-1,1)$ 是三次多项式

$\therefore$ 可用 $P_0(x)$，$P_1(x)$，$P_2(x)$，$P_3(x)$ 表示

已知 $P_0(x)=1\quad P_1(x)=x\quad P_2(x)=\dfrac{1}{2}\left(3x^2-1\right)\quad P_3(x)=\dfrac{1}{2}\left(5x^3-3x\right)$

设 $f(x)=2x^2+3x+4=C_0P_0(x)+C_1P_1(x)+C_2P_2(x)+C_3P_3(x)$

$$=C_0+C_1x+C_2\frac{1}{2}\left(3x^2-1\right)+C_3\frac{1}{2}\left(5x^2-3x\right)$$

$$=\left(C_0-\frac{C_1}{2}\right)+\left(C_1-\frac{3}{2}C_3\right)x+\frac{3}{2}C_2x^2+\frac{5}{2}C_3x^3$$

对比系数，可得：$\begin{cases}\frac{5}{2}C_3=2\\ \frac{3}{2}C_2=0\\ C_1-\frac{3}{2}C_3=3\\ C_0-\frac{C_2}{2}=4\end{cases}$ 解得：$\begin{cases}C_0=4\\ C_1=\frac{21}{5}\\ C_2=0\\ C_3=\frac{4}{5}\end{cases}$ $\therefore f(x)=4P_0(x)+\dfrac{21}{5}P_1(x)+\dfrac{4}{5}P_3(x)$

例题5-2 计算下列积分

(1) $\int_0^1 xP_5(x)dx$　　(2) $\int_{-1}^1 [P_2(x)]^2 dx$　　(3) $\int_{-1}^1 P_2(x)P_4(x)dx$

解析5-2 (1) $\because P_5(x)=\frac{1}{8}\left(63x^5-70x^3+15x\right)$

$$\therefore \int_0^1 xP_5(x)dx=\int_0^1\left(\frac{63}{8}x^6-\frac{70}{8}x^4+\frac{15}{8}x^2\right)dx$$

$$=\left(\frac{63}{56}x^7-\frac{70}{40}x^5+\frac{15}{24}x^3\right)\Big|_0^1$$

$$=\frac{63}{56}-\frac{70}{40}+\frac{15}{24}=\frac{9}{8}-\frac{14}{8}+\frac{5}{8}=0$$

例题5-2 / 计算下列积分

(1) $\int_{0}^{1} xP_5(x)dx$ (2) $\int_{-1}^{1} [P_2(x)]^2 dx$ (3) $\int_{-1}^{1} P_2(x)P_4(x)dx$

解析5-2 /

$$\left.\begin{aligned} &(2)\quad \int_{-1}^{1} [P_2(x)]^2 dx = \frac{2}{2\times 2+1} = \frac{2}{5} \\ &(3)\quad \int_{-1}^{1} P_2(x)P_4(x)dx = 0 \end{aligned}\right\} \text{正交性}$$

例题5-3 设有半径为a的球体，球面上温度为$\cos^3\theta$，求稳衡状态下球体内部的温度分布。

解析5-3 稳恒状态下温度分布满足拉普拉斯方程，由于定解条件与 φ无关，所以解只和 r,θ 有关

因此温度分布满足的定解问题为：
$$\begin{cases} \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial u}{\partial r})+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)=0 \qquad 0<r<a,\quad 0\le\theta\le\pi \\ u|_{r=a}=\cos^3\theta \quad 0\le\theta\le\pi \end{cases}$$

采用分离变量法分析，设.$u(r,\theta)=R(r)\cdot\Theta\cdot(\theta)$ 代入原方程

$$\left[r^2R'\right]'\Theta+\frac{R}{\sin\theta}\left[\sin\theta\Theta'\right]'=0 \quad\Longrightarrow\quad \left(r^2R''+2rR'\right)\Theta+\frac{R}{\sin\theta}\left(\cos\theta\Theta'+\sin\theta\Theta''\right)=0$$

即 $\left(r^2R''+2rR'\right)\Theta+(\Theta''+\cot\theta\cdot\Theta')\cdot R=0$

令 $\dfrac{r^2R''+2rR'}{R}=-\dfrac{\Theta''+\cot\theta\Theta'}{\Theta}=\lambda$

从而得到 $r^2R''+2rR'-\lambda R=0 \quad \Theta''+\cot\theta\Theta'+\lambda\Theta=0$

将 λ 写成$n(n+1)$

则方程 $\Theta''+\cot\theta\Theta'+\lambda\Theta=0$ 即为连带的勒让德方程在m=0时的情形

例题5-3 / 设有半径为a的球体，球面上温度为$\cos^3\theta$，求稳衡状态下球体内部的温度分布。

解析5-3 / $u(r,\theta)$有界，则$\Theta(\theta)$有界，当n为整数时，$\Theta(\theta)$ 在 $0\le\theta\le\pi$ 内有有界解 $\Theta_n(\theta)=P_n(\cos\theta)$

$r^2R''+2rR'-\lambda R=0$ 即 $r^2R''+2rR'-n(n+1)R=0$ 为欧拉方程

其通解为：$R_n(r)=C_1r^n+C_2r^{-(n+1)}$

为保证球心($r=0$处)温度有限： $C_2=0$ 即 $R_n(r)=C_nr^n$

原问题的通解可表示为：$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{+\infty}C_nr^nP_n(\cos\theta)$

代入球体表面的温度得：$u\big|_{r=a}=\sum_{n=0}^{+\infty}C_na^nP_n(\cos\theta)=\cos^3\theta$

令 $x=\cos\theta$ 可得 $x^3=\sum_{n=0}^{+\infty}C_na^nP_{n(x)}$

$\because$ 被展开函数最高次为3次

$\therefore$ 展开至 $P_3(x)$即可

$\therefore x^3=C_0a^0P_0(x)+C_1a^1P_1(x)+C_2a^2P_2(x)+C_3a^3P_3(x)$

例题5-3 设有半径为a的球体，球面上温度为$\cos^3\theta$，求稳衡状态下球体内部的温度分布。

解析5-3

$$\therefore x^3 = C_0a^0P_0(x) + C_1a^1P_1(x) + C_2a^2P_2(x) + C_3a^3P_3(x)$$

$$\because P_0(x) = 1 \quad P_1(x) = x \quad P_2(x) = \frac{1}{2}\left(3x^2 - 1\right) \quad P_3(x) = \frac{1}{2}\left(5x^3 - 3x\right)$$

$$\therefore x^3 = C_0 + C_1ax + C_2a^2\frac{1}{2}(3x^2 - 1) + C_3a^3(5x^3 - 3x)$$

$$= \left(C_0 - \frac{1}{2}C_2a^2\right) + \left(C_1a - \frac{3}{2}C_3a^3\right)x + \frac{3}{2}C_2a^2x^2 + \frac{5}{2}C_3a^3x^3$$

此时系数有：$\begin{cases} C_0 - \frac{1}{2}C_2a^2 = 0 \\ C_1a - \frac{3}{2}C_3a^3 = 0 \\ \frac{3}{2}C_2a^2 = 0 \\ \frac{5}{2}C_3a^3 = 1 \end{cases}$ 解得：$\begin{cases} C_0 = 0 \\ C_1 = \frac{3}{5a} \\ C_2 = 0 \\ C_3 = \frac{2}{5a^3} \end{cases}$

因此球内温度分布为： $u(r,\theta) = \dfrac{3}{5a}r\cos\theta + \dfrac{2}{5a^3}r^3\left(5\cos^3\theta - 3\cos\theta\right)$

勒让德多项式