

高斯课堂系列课程

《高数/微积分下》

版权声明：

内容来自高斯课堂原创，讲义笔记和相关图文均有著作权，视频课程已申请版权，登记号：陕作登字-2018-I-00001958，根据《中华人民共和国著作权法》、《中华人民共和国著作权法实施条例》、《信息网络传播权保护条例》等有关规定，如有侵权，将根据法律法规提及诉讼。

课时一 多元函数（一）

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 重极限	★★	0~3	选择、填空
2. 偏导数，全微分，隐函数求偏导	必考	6~10	大题

一、重极限

题型 1. 有理化

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2 - \sqrt{xy+4}}{xy} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(2 - \sqrt{xy+4})(2 + \sqrt{xy+4})}{xy(2 + \sqrt{xy+4})}$$

$$= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{-xy}{xy(2 + \sqrt{xy+4})} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{-1}{2 + \sqrt{xy+4}} = -\frac{1}{4}$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

题型 2. 重要极限公式

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (2,0)} \frac{\sin xy}{y} = \lim_{(x,y) \rightarrow (2,0)} \frac{\sin xy}{xy} \underline{x} = \lim_{(x,y) \rightarrow (2,0)} x = 2$$

$$\lim_{xy \rightarrow 0} \frac{\sin xy}{xy} = 1$$

题型 3. 无穷小替换

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (2,0)} \frac{\sqrt{1+x^2y}-1}{e^{xy}-1} = \lim_{(x,y) \rightarrow (2,0)} \frac{\frac{1}{2}x^2y}{xy} = \lim_{(x,y) \rightarrow (2,0)} \frac{1}{2}x = 1$$

$$\sqrt{1+x^2y}-1 \sim \frac{1}{2}x^2y$$

$$e^{xy}-1 \sim xy$$

☆重要极限公式

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} (1+\frac{1}{x})^x = e$$

☆无穷小替换公式：当 $x \rightarrow 0$ 时

$$1) x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1$$

$$2) \sqrt{1+x}-1 \sim \frac{1}{2}x \quad 1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$$

这里的 x 要当做是一个整体，比如若 $xy \rightarrow 0$ ， xy 作为一个整体也满足这些公式。



二、偏导数、全微分、隐函数求导（对某个变量求导的时候，其余变量均看作常数）

$(x^\mu)' = \mu x^{\mu-1}$	$(\sin x)' = \cos x$	$(\sec x)' = \sec x \tan x$	$(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$
$(e^x)' = e^x$	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\tan x)' = \sec^2 x$	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
$(a^x)' = a^x \ln a$	$(\cot x)' = -\csc^2 x$		

题型 1. $z = 3x^2y^3 + 4x^2 - 2y + 6$, 求: ① $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ ② 在 (1,1) 点偏导

解: ① $\frac{\partial z}{\partial x} = 6xy^3 + 8x$ $\frac{\partial z}{\partial y} = 9x^2y^2 - 2$ ② $\frac{\partial z}{\partial x} = 6xy^3 + 8x \Big|_{(1,1)} = 14$ $\frac{\partial z}{\partial y} = 9x^2y^2 - 2 \Big|_{(1,1)} = 7$

题型 2: $z = x^4 + y^4 - 4x^2y^2$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$

解: $\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 - 8xy^2$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 4y^3 - 8yx^2$ 则

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2 - 8y^2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -16xy$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 12y^2 - 8x^2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -16xy$$

注意:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \text{ 在区域 } D \text{ 内连续, 则 } \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

题型 3. 设 $z = \arcsin \frac{x}{y}$, ($y > 0$), 求 dz

解: $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{y})^2}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{y\sqrt{y^2-x^2}}$ $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{y})^2}} \cdot (-\frac{x}{y^2}) = -\frac{x}{y\sqrt{y^2-x^2}}$

$$dz = \frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}} dx - \frac{x}{y\sqrt{y^2-x^2}} dy$$

注意: 千万不要忘了写成全微分形式

题型 4. $z = \arctan \frac{y}{x}$, 求 $dz \Big|_{(1,1)}$

解: $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2} \cdot (-\frac{y}{x^2}) = -\frac{y}{x^2+y^2} \Big|_{(1,1)} = -\frac{1}{2}$ $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2} \Big|_{(1,1)} = \frac{1}{2}$

$$dz = -\frac{1}{2} dx + \frac{1}{2} dy$$



题型 5: $\sin x + 3y - z^3 - e^z = 6$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$

解: 令 $F = \sin x + 3y - z^3 - e^z - 6$

$$F_x = \cos x, \quad F_y = 3, \quad F_z = -3z^2 - e^z$$

由公式法得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{\cos x}{3z^2 + e^z} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = \frac{3}{3z^2 + e^z}$$

隐函数解题方法:

1) 构造函数 $F(x, y, z)$;

2) 求 $F_x \quad F_y \quad F_z$

3) $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}$



别忘了负号

题型 6: 设 $\frac{x}{z} = \ln \frac{z}{y}$, 求 $dz|_{(0,1)}$

解: 将 (0,1) 点带入方程得 $z=1$, 得这个点 (0,1,1)

$$\text{令 } F = \frac{x}{z} - \ln \frac{z}{y} = \frac{x}{z} - \ln z + \ln y$$

$$F_x = \frac{1}{z} \Big|_{(0,1,1)} = 1, \quad F_y = \frac{1}{y} \Big|_{(0,1,1)} = 1, \quad F_z = -\frac{x}{z^2} - \frac{1}{z} = -\frac{x+z}{z^2} \Big|_{(0,1,1)} = -1$$

由公式法得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = 1 \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = 1 \quad dz = dx + dy$$

练习 1.1: $z = 2x \sin 2y - e^{xy}$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$

练习 1.2: 求 $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 求 $du|_{(1,-1,1)}$

练习 1.3: 设 $\frac{x}{z} = \ln \frac{z}{y}$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

练习 1.4: 设 $z(x, y)$ 由方程 $\sin(xyz) - \frac{1}{z - xy} = 1$ 所确定, 求 $dz|_{(0,1)}$ 。



课时二 多元函数（二）

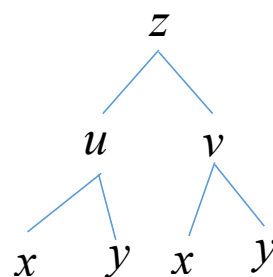
考点	重要程度	分值	常见题型
1. 复合函数求偏导	必考	6~10	大题
2. 偏导, 连续, 可微关系	★★	0~3	选择、填空

一、复合函数求偏导（先画出关系链，同路相乘，不同相加）

题型 1. $z = e^{u-2v}$, $u = x+y$, $v = xy$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$

$$\begin{aligned} \text{解: } \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = e^{u-2v} - 2e^{u-2v} \cdot y \\ &= e^{x+y-2xy}(1-2y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = e^{u-2v} - 2e^{u-2v} \cdot x \\ &= e^{x+y-2xy}(1-2x) \end{aligned}$$

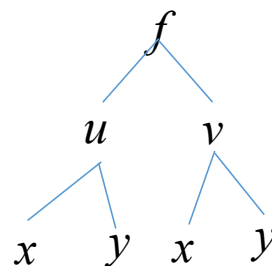


题型 2. $z = f(x^2 - y^2, e^{xy})$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$

$$\text{解: } u = x^2 - y^2, v = e^{xy}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = f'_1 \cdot 2x + f'_2 \cdot ye^{xy} = 2xf'_1 + ye^{xy}f'_2$$

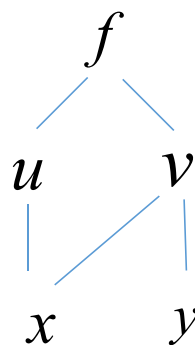
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = f'_1 \cdot (-2y) + f'_2 \cdot xe^{xy} = -2yf'_1 + xe^{xy}f'_2$$



题型 3: 设 $z = f(x, \frac{x}{y})$, 其中 f 具有二阶连续偏导数, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

$$\text{解: } u = x, v = \frac{x}{y} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = f'_1 + \frac{1}{y}f'_2$$

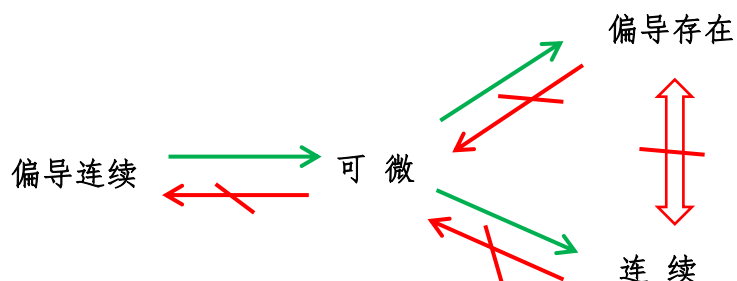
$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial x})}{\partial y} = \frac{\partial f'_1}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + (-\frac{1}{y^2})f'_2 + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial f'_2}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \\ &= f''_{12} \cdot (-\frac{x}{y^2}) + (-\frac{1}{y^2})f'_2 + \frac{1}{y}f''_{22} \cdot (-\frac{x}{y^2}) \\ &= -\frac{x}{y^2}f''_{12} - \frac{1}{y^2}f'_2 - \frac{x}{y^3}f''_{22} \end{aligned}$$



f, f'_1, f'_2 具有相同的链关系



二、偏导，连续，可微的关系（背诵）



练习 2.1: $z = u^2 + v^2$, $u = 2x + y^2$, $v = x^2$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$

练习 2.2: 设 $z = xf(2x, \frac{y^2}{x})$, 其中 f 具有连续的偏导数, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

练习 2.3: 考虑二元函数的下面四条性质:

- (1) $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 连续; (2) $f_x(x, y)$ 、 $f_y(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 连续;
- (3) $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 可微分; (4) $f_x(x_0, y_0)$ 、 $f_y(x_0, y_0)$ 存在.

若用 " $P \Rightarrow Q$ " 表示可由性质 P 推出性质 Q , 则下列四个选项中正确的是 ()

- (A) $(2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)$ (B) $(3) \Rightarrow (2) \Rightarrow (1)$
- (C) $(3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (1)$ (D) $(3) \Rightarrow (1) \Rightarrow (4)$



课时三 多元函数(三)

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 梯度, 方向导数	★★★	0~3	选择、填空、大题
2. 多元函数极值	必考	6~10	大题

一、梯度记作: $\text{grad}f(x_0, y_0)$ 或 $\nabla f(x_0, y_0)$ 。 方向导数记作: $\left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{(x_0, y_0)}$

题 1: $u = xy^2 + yz^3 + 3$ 在点 $(2, -1, 1)$ 处的梯度。

$$\text{解: } \frac{\partial u}{\partial x} = y^2 \Big|_{(2, -1, 1)} = 1 \quad \frac{\partial u}{\partial y} = (2xy + z^3) \Big|_{(2, -1, 1)} = -3$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 3yz^2 \Big|_{(2, -1, 1)} = -3$$

$$\text{grad}f(2, -1, 1) = (1, -3, -3)$$

梯度解题方法:

$$\text{梯度 } \text{grad}f = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

(注: 梯度为各偏导组成的向量)

题 2: $z = xe^{2y}$ 在 $p(1, 0)$ 到 $k(2, 1)$ 的方向导数

$$\text{解: } \frac{\partial z}{\partial x} = e^{2y} \Big|_{(1, 0)} = 1 \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2xe^{2y} \Big|_{(1, 0)} = 2 \quad \text{grad}f = (1, 2)$$

$$\overrightarrow{Pk} = (1, 1) \quad \vec{e}_l = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{(1, 0)} = \text{grad}f \cdot \vec{e}_l = (1, 2) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

方向导数解题方法:

1. 求在 P 点梯度

2. 求 \overrightarrow{pk} 的单位向量 \vec{e}_l

$$3. \frac{\partial f}{\partial l} = \text{grad}f \cdot \vec{e}_l$$

(梯度点乘 \vec{l} 的单位向量)

二、多元函数的极值

一般极值求解方法:

$$\text{① 求驻点: } \begin{cases} f'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) = 0 \end{cases} \Rightarrow (x_0, y_0)$$

$$\text{② 求 } A = f_{xx} \quad B = f_{xy} \quad C = f_{yy}$$

$$\text{③ 对每一个驻点 } (x_0, y_0) \text{ 判定 } AC - B^2$$

$$AC - B^2 > 0, \text{ 有极值, 且 } A \begin{cases} > 0, \text{ 有极小值} \\ < 0, \text{ 有极大值} \end{cases}$$

$$AC - B^2 < 0, \text{ 无极值}$$

$$AC - B^2 = 0, \text{ 不确定}$$

驻点:

满足 一阶偏导 同时 为 0 的点



题 1: $f(x, y) = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的极值 (一般极值)

解: $\begin{cases} f'_x = 3x^2 + 6x - 9 = 0 \\ f'_y = -3y^2 + 6y = 0 \end{cases}$ 得驻点: $(1, 0), (1, 2), (-3, 0), (-3, 2)$

$$A = f''_{xx} = 6x + 6 \quad B = f''_{xy} = 0 \quad C = f''_{yy} = -6y + 6$$

在 $(1, 0)$ 点, $AC - B^2 = 12 \times 6 = 72 > 0$, 有极值, 且 $A = 12 > 0$, 有极小值 $f(1, 0) = -5$

在 $(1, 2)$ 点, $AC - B^2 < 0$, 无极值

在 $(-3, 0)$ 点, $AC - B^2 < 0$, 无极值

在 $(-3, 2)$ 点, $AC - B^2 = 72 > 0$, 有极值, 且 $A = -12 < 0$, 有极大值 $f(-3, 2) = 31$

选择题中常考知识点:

1. 驻点一定是极值点 (×) (若 $AC - B^2 < 0$, 则无极值)
2. 极值点一定是驻点 (×) (极值点存在: 1. 驻点 2. 一阶导数不存在的点)
3. 可导函数的极值点一定是驻点 (√) (去掉了一阶导数不存在的情况)

题 2: 将正数 a 分为三个非负数之和, 使它们乘积最大。 (条件极值)

解: 设三个数分别为 x, y, z

目标函数: $f = xyz$

条件函数: $x + y + z = a$

构造拉格朗日函数:

$$L = xyz + \lambda(x + y + z - a)$$

$$\begin{cases} L_x = yz + \lambda = 0 \\ L_y = xz + \lambda = 0 \\ L_z = xy + \lambda = 0 \\ L_\lambda = x + y + z - a = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = z = \frac{a}{3}$$

为唯一极值点

故所求乘积最大: $f(x, y, z) = \frac{a}{3} \cdot \frac{a}{3} \cdot \frac{a}{3} = \frac{a^3}{27}$

条件极值求法:

- ① 确定目标函数 $f(x, y, z)$
- ② 确定条件函数 $g(x, y, z)$
- ③ 构造拉格朗日函数

$$L = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z)$$

$$\begin{cases} L_x = 0 \\ L_y = 0 \\ L_z = 0 \\ L_\lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow (x_0, y_0, z_0)$$

即为所求极值点。



练习 3.1: $f(x, y, z) = x^2 y z^3$, 求在 $(1, 1, 1)$ 的梯度

练习 3.2: $u = z^4 - 3xz + x^2 + y^2$ 在 $M(1, 1, 1)$ 沿 $(1, 2, 2)$ 的方向导数

练习 3.3: 求函数 $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$ 的极值

练习 3.4: 求函数 $z = xy$, 在附加条件 $x + y = 1$ 下的最大值。

练习 3.5: 周长为 $2P$ 矩形, 绕一边旋转一周得到圆柱, 求圆柱体积最大。

练习 3.6: $z = x^3 - 3x^2 - 3y^2$ 在 $D: x^2 + y^2 \leq 16$ 上的最大值和最小值 (提升)



课时四 空间几何向量

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 向量（点乘、叉乘）	★★★★	0~3	选择、填空
2. 空间平面与直线	★★★★★★	0~7	大题
3. 空间曲线的切线与法平面	★★★★	0~6	选择、填空或大题
4. 空间曲面的切平面与法线	★★★★	0~6	

一、向量（点乘、叉乘）

题型 1: $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$ $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$

求 ① $|\vec{a}|$ $|\vec{b}|$ ② 单位向量 \vec{e}_a ③ $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 及 $\cos \theta$

解: $|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14}$

$|\vec{b}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$

$\vec{e}_a = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \left(\frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{-1}{\sqrt{14}}, \frac{-2}{\sqrt{14}} \right)$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = (3, -1, -2) \cdot (1, 2, -1) = 3 - 2 + 2 = 3$

$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{3}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{6}} = \frac{3}{2\sqrt{21}}$

向量点乘公式:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \theta$$

$$\vec{a} = (x_1, y_1, z_1) \quad \vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$$

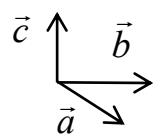
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

$$\vec{e}_a = \left(\frac{x_1}{|\vec{a}|}, \frac{y_1}{|\vec{a}|}, \frac{z_1}{|\vec{a}|} \right)$$

向量叉乘（向量积）（必考点）★

$\vec{a} \times \vec{b}$



$$\vec{c} \perp \vec{a} \text{ 且 } \vec{c} \perp \vec{b}$$

（即垂直于 \vec{a} 和 \vec{b} 所在的平面）

注：经常用于求平面的法向量

题型 2: 计算 $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$ $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, 求 $\vec{a} \times \vec{b}$

解: $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{k} = 5\vec{i} + \vec{j} + 7\vec{k}$

注意第二项是负

熟练以后可省略

$\vec{a} \times \vec{b} = (5, 1, 7)$

注：叉乘是个向量



二、空间平面与直线

1) 空间平面及其方程

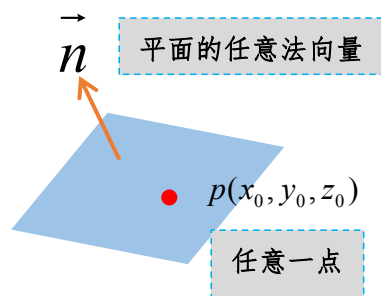
点法式方程

$$P(x_0, y_0, z_0) \Rightarrow A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0$$

$\vec{n} = (A, B, C)$

化简得 $Ax + By + Cz - Ax_0 - By_0 - Cz_0 = 0$

$Ax + By + Cz + D = 0$ (一般式)



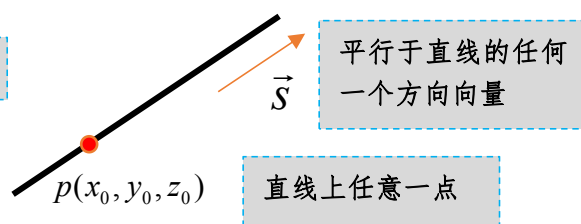
2) 空间直线及其方程

1) 对称式方程

对称式方程

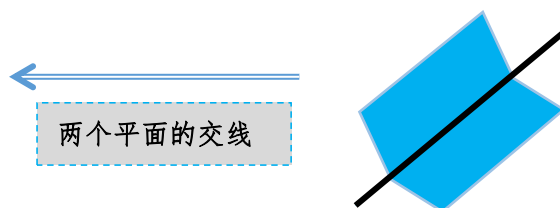
$$P(x_0, y_0, z_0) \Rightarrow \frac{x-x_0}{A} = \frac{y-y_0}{B} = \frac{z-z_0}{C}$$

$\vec{s} = (A, B, C)$



2) 一般式:
$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

3) 参数方程
$$\begin{cases} x = At + x_0 \\ y = Bt + y_0 \\ z = Ct + z_0 \end{cases}$$



题型 1: 求过 3 个点 $A(1,1,1)$ $B(-2,-2,2)$ 和 $C(1,-1,2)$ 的平面方程

解: $\overrightarrow{AB} = (-3, -3, 1)$ $\overrightarrow{AC} = (0, -2, 1)$ 故 $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ 就是该平面的一个法向量。

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (-1, 3, 6)$$

所求平面方程为 $-(x-1) + 3(y-1) + 6(z-1) = 0$ $x - 3y - 6z + 8 = 0$

题型 2: 已知平面 $x - y + z + 5 = 0$ 和 $5x - 8y + 4z + 36 = 0$ 求其交线对称式方程和参数方程

解
$$\begin{cases} x - y + z + 5 = 0 \\ 5x - 8y + 4z + 36 = 0 \end{cases}$$
 则
$$\begin{cases} \vec{n} = (1, -1, 1) \\ \vec{n} = (5, -8, 4) \end{cases}$$

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 5 & -8 & 4 \end{vmatrix} = 4\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$$
 求出方向向量



令 $y=0 \Rightarrow \begin{cases} x+z+5=0 \\ 5x+4z+36=0 \end{cases}$ 解方程得 $\begin{cases} x=-16 \\ z=11 \end{cases} \Rightarrow (-16, 0, 11)$ 求出一点

则直线方程: $\frac{x+16}{4} = \frac{y}{1} = \frac{z-11}{-3}$

令: $\frac{x+16}{4} = \frac{y}{1} = \frac{z-11}{-3} = t$ 得参数方程为 $\begin{cases} x=4t-16 \\ y=t \\ z=-3t+11 \end{cases}$

题型 3: 求直线 $\frac{x-2}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{-1}$ 与平面 $x+y+3z=0$ 的交点坐标。

解. $\frac{x-2}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{-1} = t$

得 $\begin{cases} x=t+2 \\ y=3t \\ z=-t-1 \end{cases}$ 代入平面方程 得 $t+2+3t+3(-t-1)=0$ 解得 $t=1$

故交点为 $(3, 3, -2)$

题型 4: 求点 $(1, 2, 1)$ 到平面 $x+2y+2z-10=0$ 的距离

解: 由距离公式知

$$d = \frac{|1 \times 1 + 2 \times 2 + 2 \times 1 - 10|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = 1$$

点到平面的距离公式:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

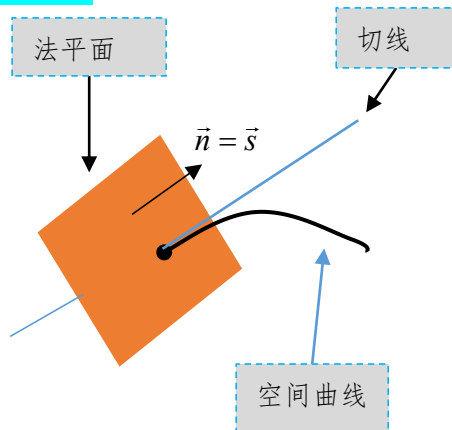
题型 5: 求曲线 $x=t, y=2t^2, z=3t^2+t$ 在 $t=1$ 处的切线和法平面

解: 当 $t=1$ 时, 得点 $P(1, 2, 4)$

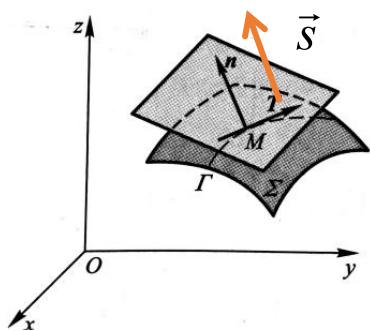
$$\begin{cases} x'=1 \\ y'=4t=4 \\ z'=6t+1=7 \end{cases} \quad \text{则 } \vec{s} = \vec{n} = (1, 4, 7)$$

故切线为 $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-4}{7}$

法平面为 $(x-1)+4(y-2)+7(z-4)=0$



5. 空间曲面的切平面与法线



M 点求出的切平面的法向量 \vec{n} 即是法线的方向向量 \vec{s}

题型 6: 求 $2e^z - z + xy = 4$ 在点 $(2, 1, 0)$ 处的切平面与法线

解 设 $F = 2e^z - z + xy - 4$

$$\text{则} \begin{cases} F_x = y = 1 \\ F_y = x = 2 \\ F_z = 2e^z - 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \vec{s} = \vec{n} = (1, 2, 1)$$

法向量和方向向量求法:

- ① 构造 F
- ② 求 F_x, F_y, F_z
- ③ $\vec{s} = \vec{n} = (F_x, F_y, F_z)$

即切平面为 $(x-2) + 2(y-1) + z = 0$

法线为 $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = z$

练习 4.1: 已知 $\vec{a} = (2, 1, -1)$, $\vec{b} = (1, -1, 2)$, 求 $\vec{a} \times \vec{b}$

练习 4.2: 已知平面 $6x - \frac{1}{2}y - z - 6 = 0$

- ① 平面法向量
- ② 在平面上找一点
- ③ 求过点 $(3, 0, -1)$ 且与已知平面平行的平面

练习 4.3: 过点 $(1, -1, 2)$ 且平行于直线 $\begin{cases} x + y - 2z - 1 = 0 \\ x + 2y - z + 1 = 0 \end{cases}$ 的直线

练习 4.4: 求通过两平行直线 $\frac{x+3}{3} = \frac{y+2}{-2} = z$ 和 $\frac{x+3}{3} = \frac{y+4}{-2} = z+1$ 的平面方程

练习 4.5: 求出曲线 $x=t, y=t^2, z=t^3$ 上的点, 使在该点的切线平行于平面 $x+2y+z=4$

练习 4.6: 求曲面 $z=2x^2+4y^2$ 在点 $(1, 1, 6)$ 处的切平面及法线方程



课时五 二重积分

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 直角坐标下计算	必考	10~15	大 题
2. 极坐标下计算			

一、直角坐标系下的计算

记作： $\iint_D f(x,y)d\sigma$ $f(x,y)$ 被积函数 $d\sigma = dxdy$ 面积元系 D 为积分区域

直角坐标下计算二重积分步骤：

1) 画出区域 D 的图形

2) 写出 x, y 的范围 (重点)

3) 代入计算 (注意：被积函数保留至第三步计算)

x 型
 x : 常数 \rightarrow 常数 ($x_{\text{左}} \rightarrow x_{\text{右}}$)
 y : 函数 \rightarrow 函数 ($y_{\text{下}} \rightarrow y_{\text{上}}$)

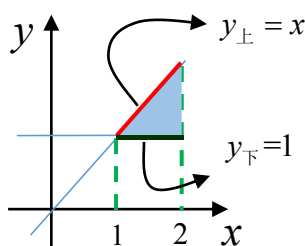
$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_{x_{\text{左}}}^{x_{\text{右}}} dx \int_{y_{\text{下}}=f(x)}^{y_{\text{上}}=f(x)} f(x,y)dy$$

y 型
 y : 常数 \rightarrow 常数 ($y_{\text{下}} \rightarrow y_{\text{上}}$)
 x : 函数 \rightarrow 函数 ($x_{\text{左}} \rightarrow x_{\text{右}}$)

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_{y_{\text{下}}}^{y_{\text{上}}} dy \int_{x_{\text{左}}=f(y)}^{x_{\text{右}}=f(y)} f(x,y)dx$$

题 1: 计算 $\iint_D xydxdy$, 其中 D 的 $y=1, x=2, y=x$ 围成.

1. 画出区域 D 图形



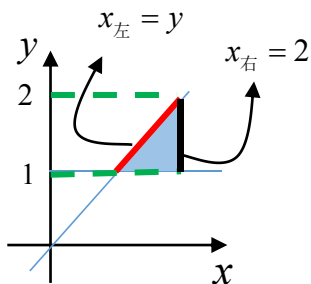
2. 写范围

x 型
 $x: 1 \rightarrow 2$
 $y: 1 \rightarrow x$

3. 代入计算

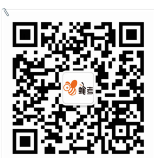
$$\begin{aligned} \iint_D xydxdy &= \int_1^2 dx \int_1^x xydy = \int_1^2 \left[\frac{1}{2}xy^2 \right]_1^x dx \\ &= \int_1^2 \left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x \right) dx = \frac{9}{8} \end{aligned}$$

注：二重积分中，被积函数必须保留至第三步计算



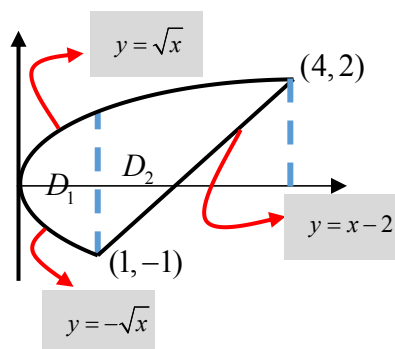
y 型
 $y: 1 \rightarrow 2$
 $x: y \rightarrow 2$

$$\begin{aligned} \iint_D xydxdy &= \int_1^2 dy \int_y^2 xydx = \int_1^2 \left[\frac{1}{2}yx^2 \right]_y^2 dy \\ &= \int_1^2 \left(2y - \frac{1}{2}y^3 \right) dy = \frac{9}{8} \end{aligned}$$



题 2. 写区域范围专项练习：计算 $\iint_D f(x, y) d\sigma$

(1) D 为 $y^2 = x$, $y = x - 2$ 围成

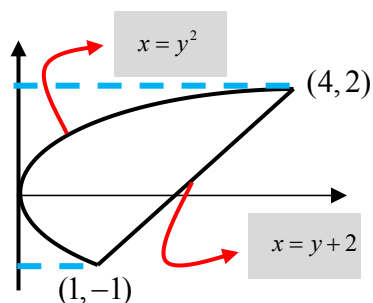


x 型:

$$D_1: \begin{cases} x: 0 \rightarrow 1 \\ y: -\sqrt{x} \rightarrow \sqrt{x} \end{cases}$$

$$D_2: \begin{cases} x: 1 \rightarrow 4 \\ y: x-2 \rightarrow \sqrt{x} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy \\ &= \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(x, y) dy + \int_1^4 dx \int_{x-2}^{\sqrt{x}} f(x, y) dy \end{aligned}$$



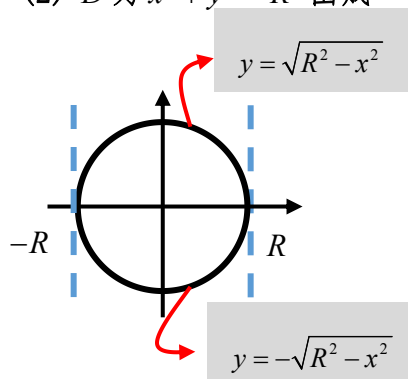
y 型:

$$y: -1 \rightarrow 2$$

$$x: y^2 \rightarrow y+2$$

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{-1}^2 dy \int_{y^2}^{y+2} f(x, y) dx$$

(2) D 为 $x^2 + y^2 = R^2$ 围成



x 型:

$$x: -R \rightarrow R$$

$$y: -\sqrt{R^2 - x^2} \rightarrow \sqrt{R^2 - x^2}$$

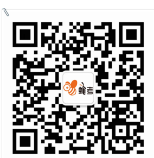
$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{-R}^R dx \int_{-\sqrt{R^2 - x^2}}^{\sqrt{R^2 - x^2}} f(x, y) dy$$

y 型:

$$y: -R \rightarrow R$$

$$x: -\sqrt{R^2 - y^2} \rightarrow \sqrt{R^2 - y^2}$$

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{-R}^R dy \int_{-\sqrt{R^2 - y^2}}^{\sqrt{R^2 - y^2}} f(x, y) dx$$



题 3: 计算 $\iint_D \left(\frac{xy^2 \cos x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 2 \right) dx dy$, 其中 D 的 $x^2 + y^2 = 1$ 围成.

$$\begin{aligned} \text{解: } & \iint_D \left(\frac{xy^2 \cos x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 2 \right) dx dy \\ &= \iint_D \frac{xy^2 \cos x}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy + \iint_D 2 dx dy \\ &= \iint_D 2 dx dy = 2 \iint_D dx dy \\ &= 2 \cdot \pi \cdot 1^2 = 2\pi \end{aligned}$$

此处的 $\frac{xy^2 \cos x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ 关于 x 为奇函数

积分区域 D 为圆, 关于 y 轴对称

$$\text{故 } \iint_D \frac{xy^2 \cos x}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy = 0$$

1) 若被积函数关于 x 为奇函数, 且积分区域 D 关于 y 轴对称, 则积分为 0

2) 若被积函数关于 y 为奇函数, 且积分区域 D 关于 x 轴对称, 则积分为 0

3) 若被积函数 $f(x, y) = 1$, 则 $\iint_D dx dy = A$ (区域 D 的面积)

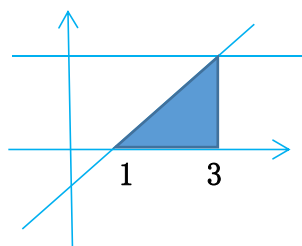
题 4: $\int_1^3 dx \int_0^{x-1} f(x, y) dy$ 交换积分次序

1: 根据范围, 画出区域

2: 把范围写成 y 型

$$\begin{aligned} x: 1 \rightarrow 3 & \Rightarrow x=1, x=3 \\ y: 0 \rightarrow x-1 & \Rightarrow y=0, y=x-1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y: 0 \rightarrow 2 \\ x: y+1 \rightarrow 3 \end{aligned}$$



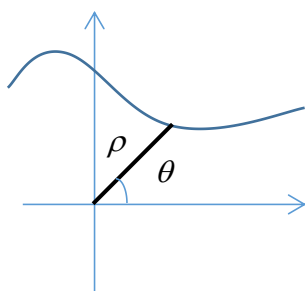
3: 代入原式

$$\int_1^3 dx \int_0^{x-1} f(x, y) dy = \int_0^2 dy \int_{y+1}^3 f(x, y) dx$$

即把原来 x 型转化成 y 型,
或者把原来 y 型转化成 x 型。

二. 极坐标下的二重积分 (大题中必考)

补充知识点: 极坐标



2. 什么是极坐标

- ① 用 θ 和 ρ 表示的函数
- ② ρ 是原点到函数上点的长度
- ③ θ 是和 x 轴夹角

1. 直角坐标转化极坐标

$$\text{方法: 令 } \begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$$

$$\text{例 } x^2 + y^2 = 4 \rightarrow \rho^2 \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta = 4$$

$$\text{得 } \rho = 2 \text{ (极坐标)}$$



极坐标求二重积分方法：

①画出区域D

先按直角坐标画出区域

②写出 θ 和 ρ 范围：

θ 的角度的范围要覆盖区域D, 且只覆盖区域D

$\theta: \theta_1 \rightarrow \theta_2$ (常数)

$\rho: \rho_1(\theta) \rightarrow \rho_2(\theta)$ (函数)

任意 θ 角对应的 ρ 长度

1) ρ 必须从原点出发

2) 范围：从一个边界到另一个边界

③代入公式

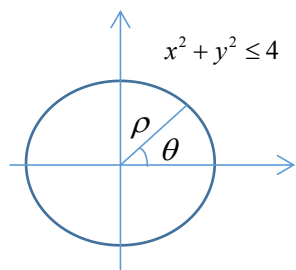
$$\iint_D f(x, y) dx dy$$

$$= \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho$$

注：将所有的 x 和 y 替换
注：不要忘了 ρ 因子

题1：求 $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ 其中 D 为 $x^2 + y^2 \leq 4$

解：①画出区域D



②写出 θ 和 ρ 范围

$\theta: 0 \rightarrow 2\pi$
(覆盖整个圆区域)

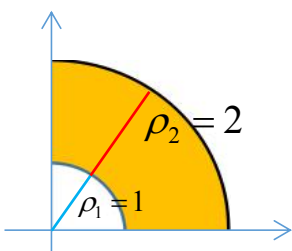
$\rho: 0 \rightarrow 2$
(任意角度 θ , 画出 ρ)

③利用公式带入计算

$$\begin{aligned} \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \sqrt{\rho^2 \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta} \rho d\rho \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho^2 d\rho = \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{3} \rho^3 \right]_0^2 d\theta \\ &= 2\pi \times \frac{1}{3} \times 8 = \frac{16\pi}{3} \end{aligned}$$

题2. 求 $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ D 为 $x^2 + y^2 = 1$ 和 $x^2 + y^2 = 4$ 围成的第一象限的部分.

解：①画出区域D



②写出 θ 和 ρ 范围

$$\begin{cases} \theta: 0 \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ \rho: 1 \rightarrow 2 \end{cases}$$

③代入公式计算

$$\begin{aligned} \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_1^2 \sqrt{\rho^2 \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta} \rho d\rho \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_1^2 \rho^2 d\rho = \frac{7\pi}{6} \end{aligned}$$

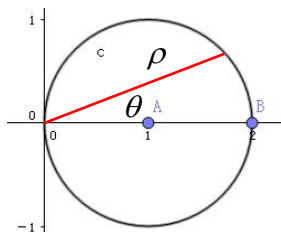


题 3. 求 $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ D 为 $(x-1)^2 + y^2 = 1$ 围成的区域.

解：①画出区域 D

②写出 θ 和 ρ 范围

③代入公式计算



$$\begin{cases} \theta: & -\frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ \rho: & 0 \rightarrow 2\cos\theta \end{cases}$$

$\theta: 0 \rightarrow 2\pi$ (错) 因为覆盖了 $x < 0$ 区域
 ρ 边界函数有两种方法:

① $\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$ 代入圆方程 (适用性很强)

② 利用圆的内接直角三角形, $\cos \theta = \frac{\rho}{2}$

$$\begin{aligned} & \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} \rho \cdot \rho d\rho \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3} \rho^3 \Big|_0^{2\cos\theta} d\theta \\ &= \frac{8}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \theta d\theta \\ &= \frac{32}{9} \end{aligned}$$

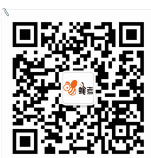
练习 5.1: 计算二重积分 $\iint_D (x-1) d\sigma$ 区域 D 由 $y = x^2$ 和 $y = x$ 所围成的第一象限部分.

练习 5.2: 交换积分次序 $\int_0^2 dy \int_{y^2}^{2y} f(x, y) dx$

练习 5.3: 计算二重积分 $\int_0^1 dy \int_y^1 \frac{\sin x}{x} dx$

练习 5.4: 求 $\iint_D e^{x^2+y^2} dx dy$ D 为 $x^2 + y^2 \leq a^2$ 围成的区域.

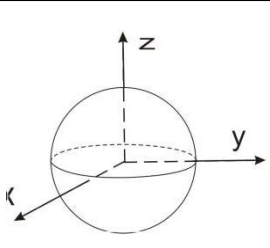
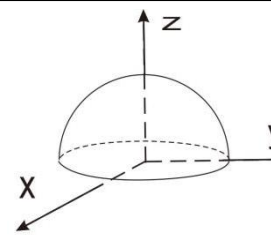
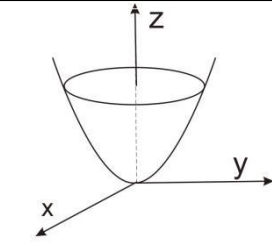
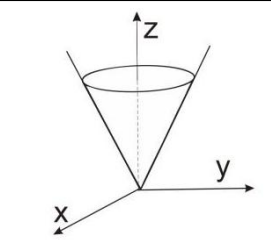
练习 5.5: 求 $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ D 为 $x^2 + (y-1)^2 = 1$ 围成的区域.



课时六 三重积分

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 直角坐标下计算	必考	10~15	大 题
2. 柱坐标下计算			

★常用函数图形（很常用，必须记住，而且要会画）

$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$	$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$	$z = x^2 + y^2$	$z = \sqrt{x^2 + y^2}$
			

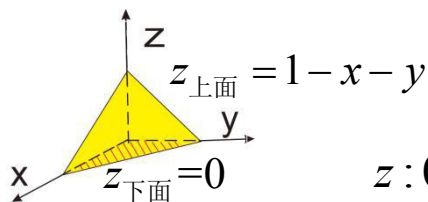
一、直角坐标下计算方法

记作： $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv$,

$f(x, y, z)$ 是被积函数， Ω 为积分区域， $dv = dxdydz$

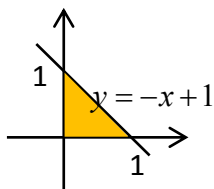
题型 1：计算 $\iiint_{\Omega} (x+y) dv$ ，其中 Ω 为平面， $x=0, y=0, z=0$ $x+y+z=1$ 在第一象限部分。

1) 画出立体图，确定 z 的范围



$$z: 0 \rightarrow 1-x-y$$

2) 投影到 xoy 面，确定 x 和 y 的范围



$$\begin{cases} x: 0 \rightarrow 1 \\ y: 0 \rightarrow 1-x \end{cases}$$

3) 代入计算

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} (x+y) dv &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} (x+y) dz \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} [(x+y)z] \Big|_0^{1-x-y} dy \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x - x^2 - 2xy + y - y^2) dy = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

直角坐标下计算三重积分套路

口诀：面→面，点→点，线→线

1) 画立体图

确定 z 的范围 ($z_{\text{下面}} \rightarrow z_{\text{上面}}$)

2) 投影图

确定区域 D 的范围 (同二重积分)

3) 代入计算

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv =$$

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1=f(x)}^{y_2=f(x)} dy \int_{z_1=z(x,y)}^{z_2=z(x,y)} f(x, y, z) dz$$

被积函数保留至第三步计算



二、柱面坐标系下计算三重积分（很重要，一定要学会）

柱坐标下计算三重积分套路：

1) 画立体图

确定 z 的范围 ($z_{\text{下面}} \rightarrow z_{\text{上面}}$)2) 投影图确定区域 D θ 和 ρ 的范围

3) 代入计算

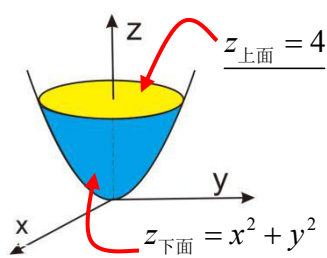
$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv =$$

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} \rho d\rho \int_{z_{\text{下}}(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)}^{z_{\text{上}}(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z) dz.$$

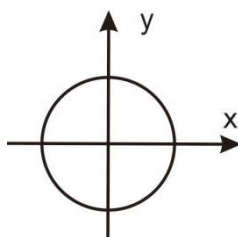
所有的 x 和 y 替换 $\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$

二重积分的极坐标

题型 1：计算 $\iiint_{\Omega} z dx dy dz$. 其中 Ω 是由曲面 $z = x^2 + y^2$ 与曲面 $z = 4$ 围成.

1) 画出立体图，确定 z 的范围

z 范围：
 $x^2 + y^2 \rightarrow 4$
 $\rho^2 \rightarrow 4$

2) 投影到 xoy 面，确定 θ 和 ρ 的范围

$\theta: 0 \rightarrow 2\pi$
 $\rho: 0 \rightarrow 2$

3) 代入公式求解

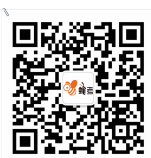
$$\iiint_{\Omega} z dx dy dz$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho d\rho \int_{\rho^2}^4 z dz$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho \left[\frac{1}{2} z^2 \right]_{\rho^2}^4 d\rho = \frac{64}{3} \pi$$

求投影区域的方法：消去 z

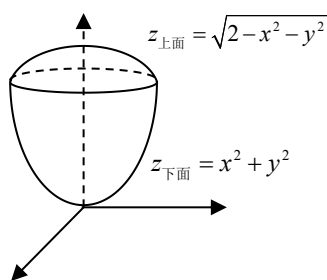
$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = 4 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$$



题型 2. 计算 $\iiint_{\Omega} z dx dy dz$. 其中 Ω 是由 $z = \sqrt{2-x^2-y^2}$ 及 $z = x^2 + y^2$ 围成

解：1) 画出立体图，确定 z 的范围

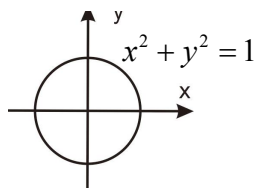
2) 投影到 xoy 面，确定 θ 和 ρ 的范围



z 的范围:

$$x^2 + y^2 \rightarrow \sqrt{2-x^2-y^2}$$

$$z: \rho^2 \rightarrow \sqrt{2-\rho^2}$$



$$\theta: 0 \rightarrow 2\pi$$

$$\rho: 0 \rightarrow 1$$

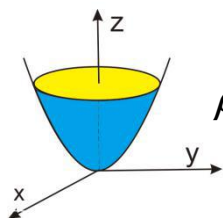
3) 代入公式

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \iiint_{\Omega} z dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho d\rho \int_{\rho^2}^{\sqrt{2-\rho^2}} z dz \\ &= 2\pi \int_0^1 \frac{1}{2} \rho (2 - \rho^2 - \rho^4) d\rho = \frac{7\pi}{12} \end{aligned}$$

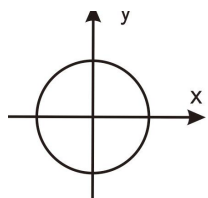
题型 3. 设 Ω 是由抛物面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $z = 1$ 所围成的立体. 求 Ω 的体积

补充知识点：若被积函数 $f(x, y, z) = 1$ ，则 $\iiint_{\Omega} dx dy dz = V$ (Ω 的体积)

解：



$$\rho^2 \leq z \leq 1$$



$$\theta: 0 \rightarrow 2\pi$$

$$\rho: 0 \rightarrow 1$$

$$V = \iiint_{\Omega} dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho d\rho \int_{\rho^2}^1 dz$$

$$= 2\pi \int_0^1 \rho (1 - \rho^2) d\rho = 2\pi \left(\frac{1}{2} \rho^2 - \frac{1}{4} \rho^4 \right) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

熟练之后

解题步骤的文字可以不用写

练习 6.1: 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} x dx dy dz$ ，其中 Ω 为三个坐标面与 $x + y + \frac{z}{3} = 2$ 围成。

练习 6.2: 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} z^2 dV$ ，其中 Ω 是由 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 及 $z = 2$ 围成

练习 6.3: 计算 $\iiint_{\Omega} (x^2 + 2y) dV$ ，其中 Ω 是由平面 $z = 4$ 及曲面 $z = x^2 + y^2$ 所围成的区域



课时七 第一类曲线积分

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 第一类曲线积分	★★★★★	3~8	选择填空或大题
2. 第二类曲线积分	★★★★★	6~10	大题
3. 格林公式	★★★★★	6~10	

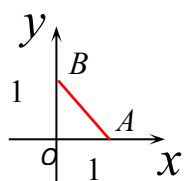
一、第一类曲线积分记作 $\int_L f(x, y) ds$.

①画图. 确定 L 的函数 确定积分区间 (a, b)	②计算 ds	③代入公式, 计算 $\int_L f(x, y) ds$.
$\begin{cases} L: y = f(x) \\ x: x_1 \rightarrow x_2 \end{cases}$	$ds = \sqrt{1 + y'^2(x)} dx$	$= \int_{x_1}^{x_2} f[x, f(x)] \sqrt{1 + y'^2(x)} dx \quad (x_1 < x_2)$
$\begin{cases} L: x = f(y) \\ y: y_1 \rightarrow y_2 \end{cases}$	$ds = \sqrt{1 + x'^2(y)} dy$	$= \int_{y_1}^{y_2} f[f(y), y] \sqrt{1 + x'^2(y)} dy \quad (y_1 < y_2)$
$L: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $t: t_1 \rightarrow t_2$	$ds = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt$	$= \int_{t_1}^{t_2} f[x(t), y(t)] \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt \quad (t_1 < t_2)$

题型 1. $\int_L (x+y) ds$ 其中 L 为连接 A(1,0) 与 B(0,1) 两点的线段。

①画图, 确定 L 和 (a, b)

②计算 ds



$$\begin{cases} L: y = -x + 1 \\ x: 0 \rightarrow 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y' &= -1 \\ ds &= \sqrt{1^2 + (-1)^2} dx \\ &= \sqrt{2} dx \end{aligned}$$

③代入公式计算

$$\int_L (x+y) ds = \int_0^1 [x + (-x+1)] \sqrt{2} dx = \sqrt{2}$$

注 2:

被积函数利用 L 的函数进行替换, 把所有变量变成统一

区分:

1. 二、三重积分的被积函数不能动
2. 曲线积分的被积函数一定化成统一 (因为曲线积分, 所有点都在 L 的函数上, 但是二、三重积分的点是在区域内)

注 1: 积分区间 (下限小于上限), 不论起点和终点

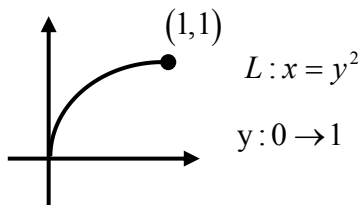


题型 2. $\int_L \sqrt{x} ds$ 其中 L 为抛物线 $x = y^2$ 所从 $(0,0)$ 到 $(1,1)$ 的一段弧

① 画图，确定 L 和 (a,b)

② 计算 ds

③ 代入公式计算



$$L: x' = 2y$$

$$ds = \sqrt{1 + (2y)^2} dy$$

$$\int_L \sqrt{x} ds = \int_0^1 \sqrt{y^2} \sqrt{1 + (2y)^2} dy$$

$$= \int_0^1 y \sqrt{1 + 4y^2} dy = \frac{1}{12} (5\sqrt{5} - 1)$$

题型 3: 设 L 为椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的周长，则求 $\int_L (3x^2 + 4y^2) ds$

若被积函数 $f(x,y) = 1$ ， $\int_L ds = L$ (积分弧段的长度)

解: $12 \times (\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3}) = 12 \times 1 \Rightarrow 3x^2 + 4y^2 = 12$

$$\int_L (3x^2 + 4y^2) ds = 12 \int_L ds = 12L$$

题型 4: 设 L 为 $x^2 + y^2 = 1$ 的周长，则求 $\int_L (x+y) ds$

1. 若被积函数 $f(x,y)$ 关于 x 为奇函数，积分曲线 L 关于 y 轴对称，则 $\int_L f(x,y) ds = 0$

2. 若被积函数 $f(x,y)$ 关于 y 为奇函数，积分曲线 L 关于 x 轴对称，则 $\int_L f(x,y) ds = 0$

解: $\int_L (x+y) ds = \int_L x ds + \int_L y ds = 0$

练习 7.1: 计算 $\oint_L e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds$. 其中 L 为 $x^2 + y^2 = a^2$. $y = x$ 及 x 轴在第一象限内所围成边界

练习 7.2: 设 L 为 $x^2 + y^2 = 1$ 下半圆圆周，求 $\int_L (x^2 + y^2) ds$

练习 7.3: 设平面曲线 $L: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ ，则 $\oint_L (4x+3y)^2 ds =$ _____ (设曲线长为 a)



课时八 第二类曲线积分

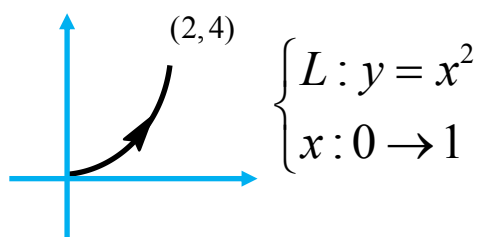
考点	重要程度	分值	常见题型
1. 第一类曲线积分	★★★★★	3~8	选择填空或大题
2. 第二类曲线积分	★★★★★★	6~10	大题
3. 格林公式	★★★★★★	6~10	

二、第二类曲线积分，记作 $\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$

① 画图 确定 L 的函数 确定起点和终点	② 将所有变量化为统一，计算 $\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$
$\begin{cases} L: y = f(x) \\ x: x_{\text{起}} \rightarrow x_{\text{终}} \end{cases}$	将所有 y 换成 x ($y = f(x), dy = f'(x)dx$) $= \int_{x_{\text{起}}}^{x_{\text{终}}} \{P[x, f(x)] + Q[x, f(x)] \cdot f'(x)\} dx$
$\begin{cases} L: x = f(y) \\ y: y_{\text{起}} \rightarrow y_{\text{终}} \end{cases}$	将所有 x 换成 y ($x = f(y), dx = f'(y)dy$) $= \int_{y_{\text{起}}}^{y_{\text{终}}} \{P[f(y), y] \cdot f'(y) + Q[f(y), y]\} dy$
$L: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ t: t_{\text{起}} \rightarrow t_{\text{终}} \end{cases}$	将所有 x, y 换成 t ($x = x(t), dx = x'(t)dt, \dots, y = y(t), dy = y'(t)dt$) $= \int_{t_{\text{起}}}^{t_{\text{终}}} \{P[x(t), y(t)] \cdot x'(t) + Q[x(t), y(t)] \cdot y'(t)\} dt$

题型 1：计算 $\int_L (x-y)dx + (x+y)dy$ 其中 L 从 (0,0) 沿 $y=x^2$ 到 (1,1)

解：① 画图，确定 L 和 (a,b)



注 1：只论起点和终点，不论大小

② 统一变量，代入公式计算

$$\int_L (x-y)dx + (x+y)dy$$

$$= \int_0^1 [(x-x^2) + (x+x^2)2x] dx$$

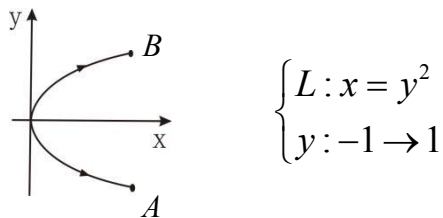
$$= \int_0^1 (x+x^2+2x^3) dx = \frac{4}{3}$$

注 2：变量代换 $y \leftrightarrow x^2 \quad dy = 2xdx$



题型 2. 计算 $\int_L xy dx$ ，其中 L 是抛物线 $y^2 = x$ 上从 $A(1, -1)$ 到 $B(1, 1)$ 上的一段弧

解：① 画图，确定 L 和 (a, b)



② 统一变量，代入公式计算

$$\int_L xy \underline{dx} = \int_{-1}^1 y^2 \cdot y \cdot \underline{2y dy} = 2 \int_{-1}^1 y^4 dy = \frac{4}{5}$$

注：没有 $Q(x, y)dy$ 项，默认为 0，不用管

练习 8.1：计算 $\int_L (x^2 - \sqrt{y}) dy$ ，其中 L 是抛物线 $y = x^2$ 上从点 $(0, 0)$ 到点 $(2, 4)$ 的一段弧；

练习 8.2：计算 $\int_L (x+y)dx + (y-x)dy$ ，其中 L 是抛物线 $y^2 = x$ 上从点 $(1, 1)$ 到点 $(4, 2)$ 的一段弧

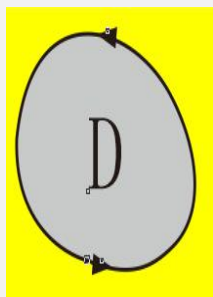


课时九 格林公式

◇ 格林公式（可以看做第二类曲线积分的简便算法）

若积分弧段 L 为 封闭 的曲线

$$\Rightarrow \int_L Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$



- 1) D 是 L 围成的区域
- 2) 格林公式是把第二类曲线积分转化成了二重积分计算其结果
- 3) 注意 P 和 Q 对应的位置

注：如图，人沿 L 方向走， D 左手边，为正，反之则为负

$$\int_L Pdx + Qdy = - \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

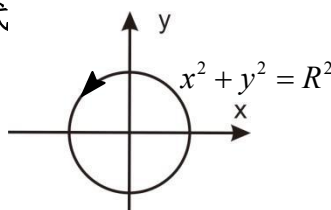
★为负的情况一般不考

题型 1：常规型

例：计算曲线积分 $\oint_L (2xy - 2y)dx + (x^2 - 4x)dy$ ，其中 L 为 $x^2 + y^2 = R^2$ ， L 为逆时针

解： L 为封闭圆周曲线，故运用格林公式

$$\begin{aligned} p &= 2xy - 2y & Q &= x^2 - 4x \\ \frac{\partial P}{\partial y} &= 2x - 2 & \frac{\partial Q}{\partial x} &= 2x - 4 \end{aligned}$$

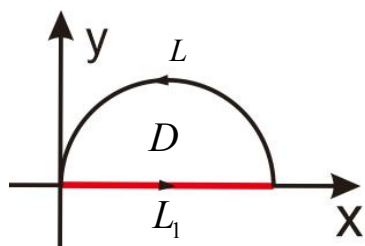


$$\begin{aligned} \oint_L (2xy - 2y)dx + (x^2 - 4x)dy &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy \\ &= \iint_D [(2x - 4) - (2x - 2)] dxdy = -2 \iint_D dxdy = -2A = -2\pi R^2 \end{aligned}$$

题型 2：缺线补线型

例：计算 $\int_L (e^x \sin y - 2y)dx + (e^x \cos y - 2)dy$ ，其中 L 为逆时针上半圆周 $(x-a)^2 + y^2 = a^2$ ， $y \geq 0$ 。

解：半圆周不是封闭曲线，补齐有向线段 L_1 ，构成封闭曲线。



$$\begin{aligned} P &= e^x \sin y - 2y & Q &= e^x \cos y - 2, \\ \frac{\partial P}{\partial y} &= e^x \cos y - 2 & \frac{\partial Q}{\partial x} &= e^x \cos y \end{aligned}$$



由格林公式得

$$\int_{L+L_1} (e^x \sin y - 2y) dx + (e^x \cos y - 2) dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D 2 dx dy = 2 \cdot \frac{1}{2} \pi a^2 = \pi a^2$$

然后计算在 L_1 上的计算积分值

代入 $y=0$ ，被积函数为 0

$$\left\{ \begin{array}{l} L_1: y=0 \\ x: 0 \rightarrow 2a \end{array} \right. \text{代入} \int_{L_1} (e^x \sin y - 2y) dx + (e^x \cos y - 2) dy = 0$$

$$\therefore \int_L = \int_{L+L_1} - \int_{L_1} = \pi a^2 - 0 = \pi a^2$$

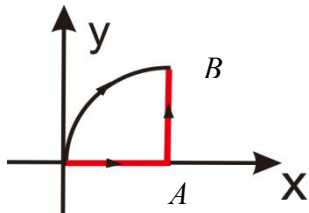
代入 $y=0$ 为常数，故 $dy=0$ ，含 dy 的项为 0

题型 3：积分与路径无关型：（若 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ ，则 $\int_L P dx + Q dy$ 与积分路径无关，只与起点和终点有关）

例：设 L 为圆周 $y = \sqrt{4x - x^2}$ 从 $(0,0)$ 到 $(2,2)$ 的一段弧，求 $\int_L (x^2 - y) dx - (x + \sin y) dy$ ，

（解析：若按照第二类曲线积分公式计算，由于被积函数和积分弧段函数复杂，太麻烦）

解：



$$p = x^2 - y \quad Q = -(x + \sin y)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = -1$$

故积分与路径无关

取 $O \rightarrow A \rightarrow B$ 路径

$$\text{在 } OA \text{ 上积分} \quad OA: \begin{cases} y=0 \\ x: 0 \rightarrow 2 \end{cases} \Rightarrow \int_{OA} (x^2 - y) dx - (x + \sin y) dy = \int_0^2 x^2 dx = \frac{8}{3}$$

$$\text{在 } AB \text{ 上积分} \quad AB: \begin{cases} x=2 \\ y: 0 \rightarrow 2 \end{cases} \Rightarrow \int_{AB} (x^2 - y) dx - (x + \sin y) dy = \int_0^2 -(2 + \sin y) dy = \cos 2 - 5$$

$$\text{则} \int_{AB} = \int_{OA} + \int_{AB} = \frac{8}{3} + \cos 2 - 5 = \cos 2 - \frac{7}{3}$$

练习 9.1：计算 $\oint_L (2xy - x^2) dx + (x + y^2) dy$ ，其中 L 由 $y = x^2$ 和 $x = y^2$ 围成逆时针方向

练习 9.2：计算 $\int_L (x^2 - y) dx + (x + \sin^2 y) dy$ ，其中 L 沿 $y = \sqrt{2x - x^2}$ 由 $(0,0)$ 到 $(2,0)$ 的弧段

练习 9.3：计算 $\int_L (6xy^2 - y^3) dx + (6x^2y - 3xy^2) dy$ ，其中 L 为 $(1,2)$ 到 $(3,4)$ 的直线



课时十 第一类曲面积分

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 第一类曲面积分	★★★★	3~8	选择填空或大题
2. 第二类曲面积分	★★★★	6~15	大题
3. 高斯公式	★★★★★★		

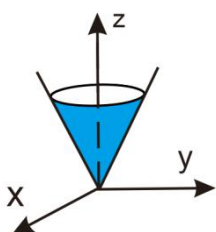
1. 第一类曲面积分，记作： $\iint_{\Sigma} f(x, y, z) ds$

题型 1. $\iint_{\Sigma} z ds$. 其中 Σ 为 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 上对应 $0 \leq z \leq 1$ 的部分

解：

1) 积分面函数

$$\Sigma: z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

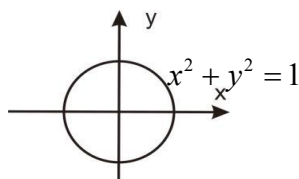


2) 计算 ds

$$z_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad z_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dxdy \\ &= \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2} dxdy = \sqrt{2} dxdy \end{aligned}$$

3) 画出投影图



$$\text{投影区域 } D_{xy}: \begin{cases} \theta: 0 \rightarrow 2\pi \\ \rho: 0 \rightarrow 1 \end{cases}$$

4) 将 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 和 $ds = \sqrt{2} dxdy$ 代入公式计算

$$\iint_{\Sigma} z ds = \iint_{D_{xy}} \sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{2} dxdy = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho \cdot \rho d\rho = \frac{2\sqrt{2}\pi}{3}$$

第一类曲面积分解题步骤：

1) 确定积分曲面 $\Sigma: z = z(x, y)$

2) 计算 $ds = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dxdy$

3) 将 Σ 投影，确定区域 D_{xy}

4) 代入 $\begin{cases} z = z(x, y) \\ ds = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dxdy \end{cases}$,

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) ds =$$

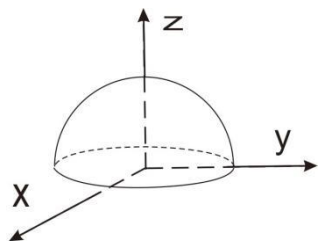
$$\iint_{D_{xy}} f[x, y, z(x, y)] \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dxdy$$



题型 2. 设 $\Sigma: x^2 + y^2 + z^2 = a^2 (z \geq 0)$ 则求 $\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2) ds$

若被积函数 $f(x, y, z) = 1$ ，则 $\iint_{\Sigma} ds = A$ （积分曲面 Σ 的面积）

解：



$$\because x^2 + y^2 + z^2 = a^2 (z \geq 0)$$

$$\therefore \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2) ds = \iint_{\Sigma} a^2 ds$$

$$= a^2 \cdot A = a^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4\pi a^2 = 2\pi a^4$$

练习 10.1. 计算 $\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) ds$ 其中 Σ 为锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 介于 $z=0$ 和 $z=1$ 的部分

练习 10.2. 计算 $\iint_{\Sigma} x^2 ds$ 其中 Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$



课时十一 第二类曲面积分

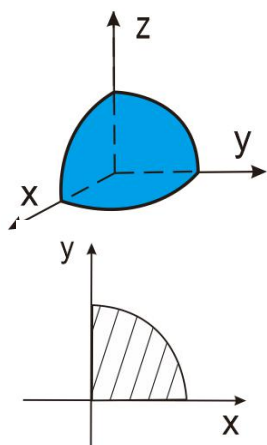
第二类曲面积分（一般不会单独考，在高斯公式中涉及）

记作： $\iint_{\Sigma} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy$

要在积分曲面上对以上三部分分别计算，三部分解题思路和步骤是一样的，因为过程太过麻烦，所以基本不考，即使考到，也考其中一部分，

题 1：计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} z dxdy$ ，其中 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 上侧在 $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ 部分

解：



1) 积分曲面

$$\Sigma: z = \sqrt{1-x^2-y^2}$$

2) 投影，确定 D_{xy}

$$\begin{cases} \theta: 0 \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ \rho: 0 \rightarrow 1 \end{cases}$$

3) 代入计算

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} z dxdy &= \iint_{D_{xy}} \sqrt{1-x^2-y^2} dxdy \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \sqrt{1-\rho^2} \rho d\rho = \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

解题思路

口诀：计算哪部分，投影到哪个面

例： $\iint_{\Sigma} R(x,y,z) dxdy$ （最常考的一部分）

1) 确认积分曲面 $\Sigma: z = z(x,y)$

2) 投影，将 $\Sigma \rightarrow xoy$ 面，确定 D_{xy}

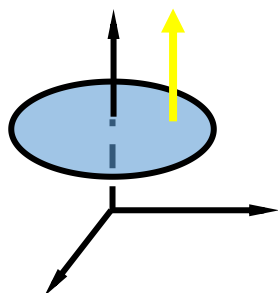
3) 代入公式计算

$$\begin{aligned} &\iint_{\Sigma} R(x,y,z) dxdy \\ &= \iint_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)] dxdy \end{aligned}$$

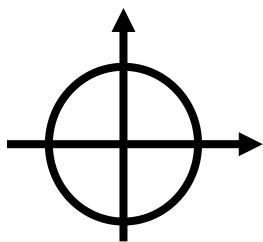
（若沿 Σ 的上、前、右方积分，为正
反之则要加一个负号）



题 2：计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} z dx dy$ ，其中 Σ 是沿曲面 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 4 \end{cases}$ 上侧



1) 积分曲面 Σ ： $z = 4$



2) 将曲面 Σ 投影到 xoy 面，确定 D_{xy}

3) 代入计算

$$\iint_{\Sigma} z dx dy = \iint_D 4 dx dy = 4 \cdot \pi \cdot 1^2 = 4\pi$$



课时十二 高斯公式

☆ 高斯公式（可以看做第二类曲面积分的简单算法，非常常考）

若积分曲面 Σ 为 封闭曲面 的 外侧

$$\iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdx dy$$

$$= \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz$$

- 1) Ω 是封闭曲面 Σ 围成的空间区域
- 2) 高斯公式是把第二类曲面积分转化成了三重积分计算其结果
- 3) 注意 P 、 Q 、 R 对应的位置
- 4) 沿曲面外侧为正，内侧为负（一般都是外侧）

题型一：常规性

例：计算 $\iint_{\Sigma} xdydz + ydzdx + zdx dy$ ，其中 Σ 是 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 的外侧

解：积分曲面 Σ 为封闭的，故可以使用高斯公式

$$P = x \quad Q = y \quad R = z$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 1 \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = 1 \quad \frac{\partial R}{\partial z} = 1$$

一定注意 P 、 Q 和 R 的位置，
以及分别对哪个变量求偏导

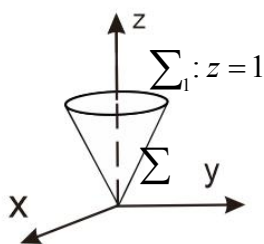
$$\text{则 } \iint_{\Sigma} xdydz + ydzdx + zdx dy = \iiint_{\Omega} (1+1+1) dxdydz$$

$$= 3 \iiint_{\Omega} dxdydz = 3V = 3 \times \frac{4}{3} \pi R^3 = 4\pi R^3$$

$$\text{球的体积公式：} V = \frac{4}{3} \pi R^3$$

题型二：缺面补面型

例：设 Σ 是锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 被平面 $z=0$ 和 $z=1$ 所截得部分的下侧，利用高斯公式计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} xdzdy + ydzdx + (z^2 - 2z) dxdy$



解：补齐 Σ_1 面，则对闭曲面利用高斯公式

$$P = x \quad Q = y \quad R = z^2 - 2z$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 1 \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = 1 \quad \frac{\partial R}{\partial z} = 2z - 2$$



利用高斯公式，先求在整个曲面 $\Sigma + \Sigma_1$ 上积分结果

$$\begin{aligned} \oiint_{\Sigma+\Sigma_1} xdzdy + ydzdx + (z^2 - 2z)dxdy &= \iiint_{\Omega} (1+1+2z-2)dxdydz = \iiint_{\Omega} 2z dxdydz \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho d\rho \int_{\rho}^1 2z dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho z^2 \Big|_{\rho}^1 d\rho = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

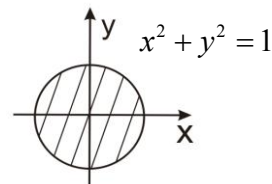
求在 Σ_1 上的积分结果

对于 Σ_1 ： $z=1$ 代入原式（ $dz=0$ ，下式中带有 dz 的项全为 0）

$$\iint_{\Sigma_1} xdzdy + ydzdx + (z^2 - 2z)dxdy = \iint_{\Sigma_1} (1-2)dxdy = -\iint_{\Sigma_1} dxdy$$

将 Σ_1 投影到 xoy 面上

根据第二类曲面积分公式计算：



$$-\iint_{\Sigma_1} dxdy = -\iint_{D_{xy}} dxdy = -\pi$$

用 $(\Sigma + \Sigma_1) - \Sigma_1$

$$\iint_{\Sigma} = \iint_{\Sigma+\Sigma_1} - \iint_{\Sigma_1} = \frac{\pi}{2} + \pi = \frac{3\pi}{2}$$

练习 12.1: 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} x^3 dydz + 2xz^2 dzdx + 3y^2 z dxdy$ ，其中 Σ 为 $z = x^2 + y^2$ ($0 \leq z \leq 1$) 取下侧。

练习 12.2: 计算 $\iint_{\Sigma} (y^2 - x) dydz + (z^2 - y) dzdx + (x^2 - z) dxdy$ ，其中 Σ 是抛物面 $z = 2 - x^2 - y^2$ 位于 $z \geq 0$ 部分的上侧。



课时十三 常数项级数

知识点	重要程度	分值	题型
1. 概念	★	略	不单独出题
2. 审敛法	★★★★★	基础（必考）	基础知识
3. 交错级数	★★★★	0~3	选择、填空、大题
4. 绝对条件收敛	★★★★	0-6	

1.1 认识级数

记作： $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 展开式 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$

令 $s(n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ 有极限，则级数收敛。反之，级数发散

例 1: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$S(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right]}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1$$

有极限，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ 收敛

例 2: $\sum_{n=1}^{\infty} 1$

$$S(n) = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 = n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty$$

无极限，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} 1$ 发散

1.2 无穷级数的性质

3) 性质（常在选择题中考）

1) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} k u_n = k \sum_{n=1}^{\infty} u_n$

$\sum_{n=1}^{\infty} U_n$	$\sum_{n=1}^{\infty} V_n$	$\sum_{n=1}^{\infty} (U_n + V_n)$
收	收	收
收	发	发
发	发	不确定



1.3. 两个常用的参照级数

$$1) \text{ 几何级数 } \sum_{n=0}^{\infty} aq^n \text{ (也就是等比数列)} \begin{cases} \text{若 } |q| < 1, \text{ 则级数 } \sum aq^n \text{ 收敛} \\ \text{若 } |q| \geq 1, \text{ 则级数 } \sum aq^n \text{ 发散} \end{cases}$$

$$2) \text{ 调和级数 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ 是发散。扩展: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \begin{cases} p > 1, \text{ 则级数收敛} \\ p \leq 1, \text{ 则级数发散} \end{cases}$$

以上两种参照级数，经常用到，可以作为结论，直接使用

2. 审敛法（判别级数收敛与否的方法）

题型 1. 判断正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2}{n^2+n}$ 的敛散性

$$\text{解: } u_n = \frac{2n^2}{n^2+n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{n^2+n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{1+\frac{1}{n}} = 2 \neq 0 \quad \text{故级数发散}$$

必要条件:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 若收敛, 则 } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0;$$

若 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$ 则级数发散

题型 2. 判断正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2}$ 的敛散性

$$\text{解: } u_n = \frac{3^n}{n^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \frac{n^2}{(n+1)^2} = 3 > 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho \begin{cases} \rho < 1 & \text{收敛} \\ \rho > 1 & \text{发散} \\ \rho = 1 & \text{不确定} \end{cases}$$

所以级数发散

题型 3. 判断正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$ 的敛散性

$$\text{解: } u_n = \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(2n+1)} = \frac{1}{2} < 1$$

故级数收敛

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho \begin{cases} \rho < 1 & \text{收敛} \\ \rho > 1 & \text{发散} \\ \rho = 1 & \text{不确定} \end{cases}$$



题型 4. 判断正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+\frac{1}{n})$ 的敛散性

如果可以用等价无穷小替换
则他们有相同的敛散性

解： $n \rightarrow \infty$ 时， $\ln(1+\frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n}$ (等价无穷小)

故 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+\frac{1}{n})$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 有相同的敛散性

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 是调和级数，发散

故 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+\frac{1}{n})$ 也是发散的

3. 交错级数

记作： $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u_n = u_0 - u_1 + u_2 + \dots + (-1)^n u_n \dots$ (正负项交错)

例：判断 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ 敛散性

交错级数判定方法：

解： $u_n = \frac{1}{n}$

则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ 且 $u_{n+1} = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n} = u_n$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0 \\ u_{n+1} \leq u_n \end{array} \right\} \Rightarrow \text{收敛}$$

故交错级数是收敛的

注意：一般项 u_n 不包括 (-1) 项

4. 绝对收敛和条件收敛

1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛 绝对收敛

2) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散，而 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 条件收敛

例： $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$

解： $\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散



而 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ 为交错级数。满足 $\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \\ \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \end{cases} \Rightarrow$ 收敛，故级数为条件收敛

练习 13.1：判断下列正项级数敛散性

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^n}$ 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$ 3) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{\pi}{3^n}$

练习 13.2：判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n - \ln n}$ 敛散性



课时十四 幂级数

知识点	重要程度	分值	题型
1. 收敛半径、收敛域	★★★★★	6~10	基础知识
2. 和函数	★★★★★		选择 填空 大题
3. 幂级数展开	★★★★★	0~8	

记作 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 展开式 $= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$ (含 x 项, 且敛散性随 x 的取值不同而不同)

1. 收敛半径, 收敛区间, 收敛域

	收敛区间	收敛域
若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left \frac{a_{n+1}}{a_n} \right = \rho$	$x \in (-R, R)$	验证: $x = \pm R$
收敛半径 $R = \begin{cases} \frac{1}{\rho} & \rho \neq 0 \\ +\infty & \rho = 0 \\ 0 & \rho = +\infty \end{cases}$	$x \in (-\infty, +\infty)$	$x \in (-\infty, +\infty)$
	$x = 0$	$x = 0$

题型 1: 求 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ 的收敛半径和收敛域

解: $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 则 $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$

则收敛半径为 $R = \frac{1}{\rho} = 1$ 收敛区间: $x \in (-1, 1)$

当 $x=1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ 为交错级数, 满足 $\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \\ \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \end{cases}$, 故收敛。

当 $x=-1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{2n-1} \frac{1}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散的, 则收敛域 $x \in (-1, 1]$



题型 2: 求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{2^n}$ 的收敛域

注意: 把 $(x-2)$ 当作整体

$$\text{解: } a_n = \frac{1}{2^n} \quad \rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$$

则收敛半径 $R = \frac{1}{\rho} = 2$, 收敛区间 $x-2 \in (-2, 2) \Rightarrow x \in (0, 4)$

当 $x=0$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ 是发散的

当 $x=4$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} 1$ 是发散的, 则收敛域为 $x \in (0, 4)$

题型 3: 求 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} x^{2n}$ 的收敛半径 R

$$\text{解: } a_n = \frac{2n-1}{2^n} \quad \rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{2n-1} = \frac{1}{2}$$

则收敛半径 $R = \frac{1}{\sqrt{\rho}} = \sqrt{2}$, 收敛区间 $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

当 $x = -\sqrt{2}$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} 2n-1$ 是发散的

当 $x = \sqrt{2}$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} 2n-1$ 是发散的, 则收敛域为 $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

x^{kn+l} 型

这种类型下, 忽略 l ,

$$\text{收敛半径 } R = \frac{1}{\sqrt[k]{\rho}}$$

练习 14.1: 求 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{n} x^n$ 收敛域

练习 14.2: $\sum_{n=1}^{\infty} n 2^{n+1} x^{2n-1}$

2. 和函数, 记作: $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (对幂级数求和)

性质 1: 可导并逐项可导 $S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n x^{n-1}$

性质 2: 可积并逐项可积 $\int S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \int a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \frac{1}{n+1} x^{n+1}$



◇ 麦克劳林公式, 最常考 $\frac{1}{1-x}$

$\frac{1}{1-x}$	$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$	$(-1 < x < 1)$
$\frac{1}{1+x}$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 + \dots + (-1)^n x^n$	$(-1 < x < 1)$
$\ln(1+x)$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$	$(-1 < x \leq 1)$
e^x	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$	$(-\infty < x < +\infty)$
$\sin x$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$(-\infty < x < +\infty)$
$\cos x$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$(-\infty < x < +\infty)$

题型 1: 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ 的和函数

1) 求收敛域:

$$a_n = n, \rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1,$$

收敛半径 $R = \frac{1}{\rho} = 1$, 收敛区间为 $(-1, 1)$

当 $x = -1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n$ 发散,

$x = 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} n$ 发散, 故收敛域为 $(-1, 1)$ 。

2) 本题先积后导:

$$\text{设 } S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \quad \int_0^x S(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x nx^{n-1} dx = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1}{1-x} - 1$$

$$S(x) = \left[\int_0^x S(x) dx \right]' = \left[\frac{1}{1-x} - 1 \right]' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 和函数 $s(x)$ 求法

- 1) 求出收敛域
- 2) 先积后导或者先导后积
- 3) 利用麦克劳林公式

一定注意要先求出收敛域

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$$



题型 2: 求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n}$ 的和函数

解: 1) 求收敛域

$$a_n = \frac{1}{2n} \quad \rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{2n+2} = 1$$

$$\therefore R = \frac{1}{\sqrt{\rho}} = 1, \text{ 收敛区间为 } (-1, 1),$$

$$\text{当 } x = -1 \text{ 时, } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{2n} \text{ 发散,}$$

$$\text{当 } x = 1 \text{ 时, } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} \text{ 发散, 则收敛域为 } (-1, 1)$$

$$2) \text{ 令 } s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n} = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n}, \text{ 两边同除以 } x$$

注: 为方便求导或者积分, 进行相应调整

$$\text{得 } \frac{s(x)}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n}, \text{ 先导后积}$$

$$\left[\frac{s(x)}{x} \right]' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n-1} = x \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n-2} = x \sum_{n=1}^{\infty} (x^2)^{n-1}$$

要把 x^2 看做整体, 对应麦克劳林公式

$$= x(1 + x^2 + x^4 + \cdots (x^2)^n + \cdots) = \frac{x}{1-x^2} \quad (|x| < 1)$$

$$\text{积分得 } \frac{s(x)}{x} = \int_0^x \frac{x}{1-x^2} dx = -\frac{1}{2} \ln(1-x^2)$$

$$\text{可得 } s(x) = -\frac{x}{2} \ln(1-x^2), \quad (-1 < x < 1)$$

练习 14.3: 求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$ 和函数

练习 14.4: 求 $\sum_{n=1}^{\infty} n(x-1)^{n-1}$ 和函数

练习 14.5: 求 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2^n}$ 的和

$$(\text{提示: } s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)x^n \Rightarrow s\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2^n})$$



3. 幂级数的展开（将函数变成级数）

例： $f(x) = \frac{1}{x^2 + 3x + 2}$ 展开成 $(x-1)$ 的幂级数

解：

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 3x + 2} = \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} = \frac{1}{2+(x-1)} - \frac{1}{3+(x-1)}$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1 + \frac{(x-1)}{2}} \right] - \frac{1}{3} \left[\frac{1}{1 + \frac{(x-1)}{3}} \right]$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + \cdots (-1)^n x^n + \cdots$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x-1}{2} \right)^n - \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x-1}{3} \right)^n$$

$$\frac{(x-1)}{2} \in (-1, 1) \Rightarrow x \in (-1, 3)$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n - \frac{1}{3^{n+1}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n$$

$$\frac{(x-1)}{3} \in (-1, 1) \Rightarrow x \in (-2, 4)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}} \right) (x-1)^n \quad x \in (-1, 3)$$

练习 14.6：将 $f(x) = \frac{3}{x^2 + x - 2}$ ，展开成 $x-2$ 的幂级数

