高斯课堂系列课程

《运筹学》

习题答案

（微信扫一扫）

版权声明：

内容来自高斯课堂原创，讲义笔记和相关图文均有著作权，视频课程已申请版权，登记号：陕作登字-2018-I-00001958，根据《中华人民共和国著作权法》、《中华人民共和国著作权法实施条例》、《信息网络传播权保护条例》等有关规定，如有侵权，将根据法律法规提及诉讼。

课时一　线性规划问题

考点	重要程度	占分	常见题型
1. 线性规划问题的建模	★★★★	0～10	大题
2. 化标准型	必考	5～8	大题
3. 图解法	★★★	0～8	大题

1. 线性规划问题的建模

题 1. 某厂生产甲、乙、丙三种产品，需要 A、B 两种原料，以及1、2 两种设备。单位产品资源消耗量、销售利润值、各种资源限制数量如下表所示：

	甲	乙	丙	现有资源
原料 A	3	0	2	12 (kg)
原料 B	0	4	2	12 (kg)
设备1	5	5	3	25（小时）
设备2	4	6	3	24（小时）
利润	8	8	6	

试建立使得该厂能获得最大利润的生产计划的线性规划模型（不求解）。

解：设甲乙丙三种产品分别生产 x_1，x_2，x_3 单位

$$\max z = 8x_1 + 8x_2 + 6x_3$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_3 \le 12 \\ 4x_2 + 2x_3 \le 12 \\ 5x_1 + 5x_2 + 3x_3 \le 25 \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 \le 24 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

解题步骤：
1）设决策变量
2）列目标函数
3）列约束条件
4）列非负条件

2. 化标准型

题 1. 将该模型化为标准型：

$$\min z = 5x_1 + x_2 + 4x_3$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 \ge 1 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 \le 4 \\ x_1 + x_3 = -3 \\ x_1 \ge 0, x_2 \le 0, x_3 \text{无约束} \end{cases}$$

标准型要求：
1）目标函数最大
2）约束条件等式
3）资源限量非负
4）决策变量非负

解题方法：
目标替换
加/减变量
同乘 -1
变量替换

解：$\max -z = -5x_1 - x_2 - 4x_3$

$$\max z' = -5x_1 - x_2 - 4x_3$$

$$x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 1,\ x_4 \ge 0$$

$$3x_1 - x_2 + x_3 + x_5 = 4,\ x_5 \ge 0$$

微信扫一扫　4 小时速成课程

$-x_1 - x_3 = 3$

$x_2' = -x_2,\quad x_2' \ge 0 \quad x_2 = -x_2'$

$x_3 = x_3' - x_3'',\ x_3' \ge 0, x_3'' \ge 0$

综上：$\max z' = -5x_1 + x_2' - 4x_3' + 4x_3''$

$$s.t.\begin{cases} x_1 - 3x_2' + x_3' - x_3'' - x_4 = 1 \\ 3x_1 + x_2' + x_3' - x_3'' + x_5 = 4 \\ -x_1 - x_3' + x_3'' = 3 \\ x_1, x_2', x_3', x_3'', x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

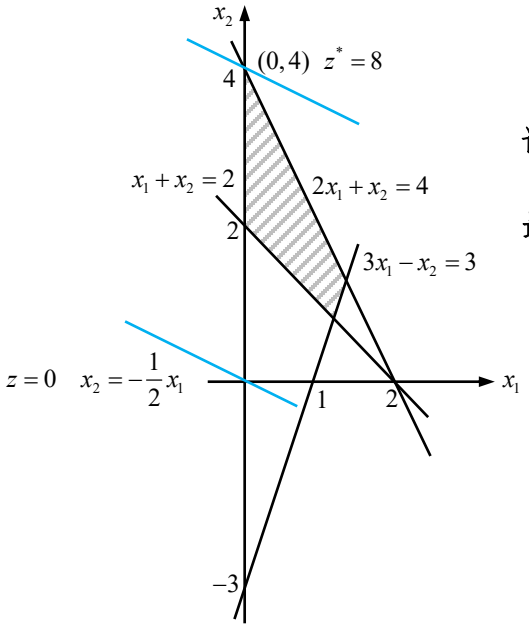
3. 图解法

题 1. 用图解法求线性规划问题。

$\max z = x_1 + 2x_2$

$$s.t.\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1 + x_2 \ge 2 \\ 3x_1 - x_2 \le 3 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

解：



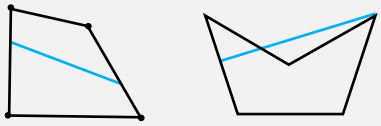
该问题具有唯一最优解 $X^* = (0,4)$

最优目标值为 $z^* = 8$

微信扫一扫　4 小时速成课程

常考的几点结论：

1. 若线性规划问题存在可行解，则问题的可行域是凸集。
2. 每个基可行解对应可行域的一个顶点；
3. 如果有最优解，必定在某个顶点上得到。



凸集　　凹集

题 2. 线性规划可行域的顶点一定是（　）。

$A.$ 基可行解　　$B.$ 非基本解　　$C.$ 非可行解　　$D.$ 是最优解

答案：A

题 3. 当线性规划的可行解集合非空时一定（　）。

$A.$ 包含点 $X=(0,0,\cdots 0)$　　$B.$ 有界　　$C.$ 无界　　$D.$ 是凸集

答案：D

课时一　练习题

1. 一家工厂制造三种产品，需要三种资源——技术服务、劳动力和行政管理。下表列出了三种单位产品对各种资源的需求量。

产品	资源（小时）			单位利润（元）
	技术服务	劳动力	行政管理	
1	1	5	2	10
2	1	4	2	6
3	1	10	6	4

今有100小时的技术服务，600小时的劳动力和300小时的行政管理时间可供使用。试确定能使总利润最大的产品生产量的线性规划模型，不用求解。

2. 某工厂用四种含蛋白质，葡萄糖，氨基酸的原料，配置一种新的营养保健品，要求每千克营养保健品中蛋白质不少于20%，葡萄糖不少于35%，氨基酸不少于30%。四种原料中蛋白质，葡萄糖，氨基酸的含量及价格如下表：

成分＼原料	1	2	3	4
蛋白质(%)	30	40	20	15
葡萄糖(%)	20	30	25	40
氨基酸(%)	40	25	55	30
价格(元/千克)	30	30	35	50

由于技术上的原因，原料2的用量不能少于30%，原料4不能超过40%。试建立一个线性规划模型，以便求得成本最低而又合乎要求的新营养保健品。

微信扫一扫　4 小时速成课程

3. 将以下线性规划模型化为标准形式：

$$\min z=-3x_1+5x_2-7x_3$$

$$s.t.\begin{cases}4x_1+2x_2+3x_3\le 7\\3x_1+4x_2-x_3\ge 2\\6x_1+3x_2+4x_3\ge 5\\x_1,x_2,x_3\ge 0\end{cases}$$

4. 将以下线性规划模型化为标准型：

$$\min z=3x_1+x_2-2x_3$$

$$\begin{cases}2x_1+3x_2-4x_3\le 12\\4x_1+x_2+2x_3\ge 8\\3x_1-x_2+3x_3=6\\x_1\ge 0,x_2\text{无约束},x_3\le 0\end{cases}$$

5. 用图解法求解以下线性规划问题：

$$\max z=x_1+x_2$$

$$s.t.\begin{cases}3x_1+4x_2\le 11\\5x_1+2x_2\le 9\\x_1\ge 0,x_2\ge 0\end{cases}$$

6. 线性规划问题的可行域是凸集（　）。

7. 线性规划问题的解有四种可能结果，它们是_____，_____，_____，_____。

微信扫一扫　4 小时速成课程

课时二　单纯形法

考点	重要程度	占分	常见题型
1. 单纯形法	必考	10～15	选择/填空/大题
2. 线性规划解的概念	★★★★★	0～6	选择/填空/判断

1. 单纯形法

题 1. 用单纯形法求解以下线性规划问题：

$$\max z = 6x_1 - 2x_2 + x_3$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 \le 2 \\ x_1 + 4x_3 \le 4 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

单纯形法解题步骤：
1）化标准型；
2）列初始单纯形表；
3）最优性检验；
4）基变换，直至找到最优解。

解：1）化标准型：

$$\max z = 6x_1 - 2x_2 + x_3$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + 4x_3 + x_5 = 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

2）列初始单纯形表：

c_j			6	-2	1	0	0	θ
c_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_4	2	2	-1	2	1	0	1
0	x_5	4	1	0	4	0	1	4
σ_j			6	-2	1	0	0	

3）最优性检验：检验数都≤ 0，得到最优解，否则进行基变换。

因为$\delta_1 = 6 > 0$，$\delta_3 = 1 > 0$，故进行基变换。

4）基变换，直至找到最优解。

c_j			6	-2	1	0	0	θ
c_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
6	x_1	1	1	$-1/2$	1	$1/2$	0	—
0	x_5	3	0	$1/2$	3	$-1/2$	1	6
σ_j			0	1	-5	-3	0	

微信扫一扫　4 小时速成课程

c_j			6	-2	1	0	0	θ
c_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
6	x_1	4	1	0	4	0	1	
-2	x_2	6	0	1	6	-1	2	
σ_j			0	0	-11	-2	-2	

最优解为：$X^*=(4,6,0,0,0)$，$z^*=12$

解的判别：

检验数都≤ 0，且无非基变量检验数$=0$，有唯一最优解；

c_j			6	-2	0	0	0	θ
c_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
6	x_1	4	1	0	4	0	1	
-2	x_2	6	0	1	6	-1	2	
σ_j			0	0	-11	-2	-2	

检验数都≤ 0，且有非基变量检验数$=0$有无穷多最优解；

c_j			6	-2	2	0	0	θ
c_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
6	x_1	4	1	0	4	0	1	
-2	x_2	6	0	1	11	-1	2	
σ_j			0	0	0	-2	-2	

有非基变量检验数>0，但该检验数所在列的系数均<0,有无界解。

c_j			6	-2	0	0	0	θ
c_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
6	x_1	4	1	0	-4	0	1	
-2	x_2	6	0	1	-12	-1	2	
σ_j			0	0	1	-2	-2	

题 2. 若线性规划问题最优解对应的单纯形表中，有一个非基变量的检验数为 0，则该线性规划问题具有_____。

答案：无穷多最优解

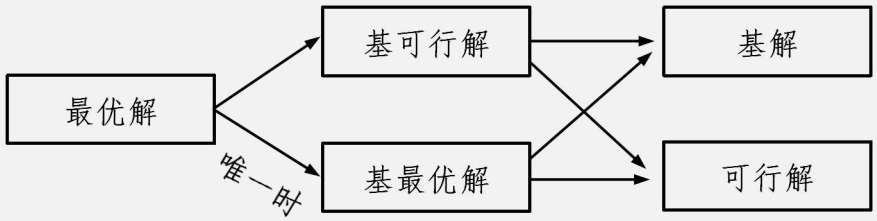
题 3. 极大化线性规划问题的基可行解是最优解的条件是其对应的检验数_____。

答案：都小于或等于零

微信扫一扫　4 小时速成课程

2. 线性规划解的概念

解的关系：



箭尾的解一定是箭头的解，反之不一定成立。

题 1.线性规划问题最优解唯一时，最优解也是基最优解。（　　）

答案：√

题 2.在线性规划问题的基本解中，所有的非基变量等于_____。

答案：零

课时二　练习题

1. 用单纯形法求解：

$$\max z = x_1 + 2x_2 + x_3$$

$$s.t\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 \le 15 \\ \frac{1}{3}x_1 + x_2 + 5x_3 \le 20 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

2. 用单纯形法求解：

$$\max z = 3x_1 + 2x_2$$

$$s.t\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \le 4 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 12 \\ x_1 - x_2 \le 3 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

3. 线性规划具有多重最优解是指（　）。

A. 目标函数系数与某约束系数对应成比例　　*B.* 最优表中存在非基变量的检验数为零

C. 可行解集合无界　　*D.* 基变量全部大于零

4. 线性规划的约束条件为 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_4 = 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{cases}$**，则基可行解是（　）。**

A. $(2,0,0,1)$　　*B.* $(-1,1,2,4)$　　*C.* $(2,2,-2,-4)$　　*D.* $(0,0,2,4)$

微信扫一扫　4 小时速成课程

课时三　对偶问题

考点	重要程度	占分	常见题型
1. 化对偶问题	必考	5～10	大题
2. 对偶理论	必考	5～10	选择、填空、大题

1. 化对偶问题

题 1. 写出以下问题的对偶问题

$$\max z = 5x_1 + 3x_2 + 6x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \le 18 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 16 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 10 \\ x_1, x_2 \ge 0, x_3 \text{无约束} \end{cases}$$

解：$\min z' = 18y_1 + 16y_2 + 10y_3$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 + y_3 \ge 5 \\ 2y_1 + y_2 + y_3 \ge 3 \\ y_1 + 3y_2 + y_3 = 6 \\ y_1 \ge 0, y_2, y_3 \text{无约束} \end{cases}$$

解题步骤：

1. 列目标函数
2. 列约束条件
3. 列变量范围
4. 填符号

符号填写规则：

大化小：约束让变量反号，变量让约束同号；

小化大：变量让约束反号，约束让变量同号。

题 2. 下题为某问题的最终单纯形表，直接求其对偶问题的最优解，并求各资源的影子价格。

项目		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	15/2	0	0	1	5/4	−15/2
x_1	7/2	1	0	0	1/4	−1/2
x_2	3/2	0	1	0	−1/4	3/2
σ_j		0	0	0	−1/4	−1/2

解：对偶问题的最优解为：$Y^* = (0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 0, 0)$

b_1 资源的影子价格为 0

b_2 资源的影子价格为 $\frac{1}{4}$

b_3 资源的影子价格为 $\frac{1}{2}$

影子价格：最优情况下，增加单位数量资源使目标函数增加的值。

未充分利用资源的影子价格为 0 。

微信扫一扫　4 小时速成课程

2. 对偶理论

1. 原问题（极大化问题）为无界解，则对偶问题（极小化问题）无可行解；
2. 原问题有可行解，对偶问题无可行解，则原问题为无界解；
3. 原问题无可行解，则其对偶问题具有无界解或无可行解；
4. 原问题目标函数值＝对偶问题目标函数值 $\Leftrightarrow$ 原问题和对偶问题均取得最优解。

题 1. 互为对偶的两个线性规划问题，若其中一个有最优解，则另外一个必定（　）

A.无可行解　　B.有可行解，也可能无可行解

C.有最优解　　D.不一定有最优解

答案：C

题 2. 若对偶问题为无界解，则原问题无可行解（　）。

答案：√

题 3. 线性规划问题：

$$\min \omega = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 \geq 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 \geq 3 \\ x_j \geq 0\ ,\ j = 1, 2, \cdots 5 \end{cases}$$

已知其对偶问题的最优解为 $y_1^* = \frac{4}{5}$，$y_2^* = \frac{3}{5}$，$z^* = 5$，试用对偶理论找出原问题的最优解。

解：写出对偶问题：

$$\max z = 4y_1 + 3y_2$$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 \leq 2 \\ y_1 - y_2 \leq 3 \\ 2y_1 + 3y_2 \leq 5 \\ y_1 + y_2 \leq 2 \\ 3y_1 + y_2 \leq 3 \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ 对偶问题化标准型：

$$\max z = 4y_1 + 3y_2$$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 + y_{s_1} = 2 \\ y_1 - y_2 + y_{s_2} = 3 \\ 2y_1 + 3y_2 + y_{s_3} = 5 \\ y_1 + y_2 + y_{s_4} = 2 \\ 3y_1 + y_2 + y_{s_5} = 3 \\ y_1, y_2, y_{s_i} \geq 0\ \ i = 1 \cdots 5 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ 将 $y_1^* = \frac{4}{5}$，$y_2^* = \frac{3}{5}$ 代入约束条件：

$$\begin{cases} \frac{4}{5} + 2 \cdot \frac{3}{5} + y_{s_1} = 2 \\ \frac{4}{5} - \frac{3}{5} + y_{s_2} = 3 \\ 2 \cdot \frac{4}{5} + 3 \cdot \frac{3}{5} + y_{s_3} = 5 \\ \frac{4}{5} + \frac{3}{5} + y_{s_4} = 2 \\ 3 \cdot \frac{4}{5} + \frac{3}{5} + y_{s_5} = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_{s_1} = 0 \\ y_{s_2} > 0 \\ y_{s_3} > 0 \\ y_{s_4} > 0 \\ y_{s_5} = 0 \end{cases}$$

由互补松弛性得：

$y_{s_2} \cdot x_2^* = 0$，$y_{s_3} \cdot x_3^* = 0$，$y_{s_4} \cdot x_4^* = 0$

又 y_{s_2}，y_{s_3}，y_{s_4} 均 > 0，故 $x_2^* = x_3^* = x_4^* = 0$

互补松弛性：取得最优解时，
原问题变量 · 对偶问题松弛变量 $= 0$；
对偶问题变量 · 原问题松弛变量 $= 0$。

微信扫一扫　4 小时速成课程

将原问题化为标准型等式：$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3+x_4+3x_5-x_{s_1}=4 \\ 2x_1-x_2+3x_3+x_4+x_5-x_{s_2}=3 \end{cases}$，

由互补松弛性得：$y_1^*\cdot x_{s_1}=0, y_2^*\cdot x_{s_2}=0$

又 $y_1^*=\frac{4}{5}, y_2^*=\frac{3}{5}$，故 $x_{s_1}=x_{s_2}=0$，

将 $x_2^*=x_3^*=x_4^*=x_{s_1}=x_{s_2}=0$ 代入 $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3+x_4+3x_5+x_{s_1}=4 \\ 2x_1-x_2+3x_3+x_4+x_5+x_{s_2}=3 \end{cases}$

得 $\begin{cases} x_1^*+3x_5^*=4 \\ 2x_1^*+x_5^*=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^*=1 \\ x_5^*=1 \end{cases}$，故原问题的最优解为：$X^*=(1,0,0,0,1)$，$\omega^*=5$

课时三　练习题

1. 写出下列线性规划问题的对偶问题：

（1）$\min z=x_1+2x_2-3x_3$

$$s.t\begin{cases} x_1+3x_3\geq 3 \\ 2x_2+2x_3\leq 10 \\ 2x_1+x_2=8 \\ x_1\leq 0, x_2 free, x_3\geq 0 \end{cases}$$

（2）$\max z=3x_1+2x_2+5x_3$

$$s.t\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3\leq 20 \\ 2x_1+x_2+5x_3=17 \\ x_1+x_2+3x_3=8 \\ x_1,x_2\geq 0, x_3\text{无约束} \end{cases}$$

2. 影子价格反映了资源的稀缺程度，当某种资源的影子价格为____时，表示资源有剩余，不短缺，或资源过多供应。

3. 若线性规划的最优解的某种资源_____时，其影子价格为_____。

4. 判断下列说法是否正确。

1）如果原问题有可行解，则对偶问题也一定有可行解。（　　）

2）如果原问题和对偶问题都存在可行解，则二者都有最优解。（　　）

3）对偶问题的对偶问题不一定是原问题。（　　）

5. 如果线性规划问题存在最优解，下列说法正确的是（　）

A. 原问题的最优值大于对偶问题的最优值。

B. 原问题的最优值小于对偶问题的最优值

C. 原问题的最优值等于对偶问题的最优值

D. 以上都不正确

微信扫一扫　4 小时速成课程

6. 已知线性规划问题：

$$\max z = 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 + x_4 \le 6 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \le 10 \\ x_j \ge 0 (j = 1,2,3,4) \end{cases}$$

设对偶变量为 y_1, y_2，其对偶问题的最优解为 $y_1^* = 3, y_2^* = 1$，试运用对偶问题的性质，求原问题的最优解。

微信扫一扫 4 小时速成课程

课时四　灵敏度分析

考点	重要程度	占分	常见题型
1. 单纯形法的矩阵描述	★★★★★	0～10	大题
2. 灵敏度分析	必考	10～12	大题

1. 单纯形法的矩阵描述

初始单纯形表：

c_j			-7	6	1	1	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	x_5	20	13	-4	5	-2	1	0
0	x_6	8	5	-1	1	-1	0	1
δ_j			-7	6	1	1	0	0

迭代后的单纯形表：

c_j			-7	6	1	1	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
-7	x_1	$12/7$	1	0	$-1/7$	$-2/7$	$-1/7$	$4/7$
6	x_2	$4/7$	0	1	$-12/7$	$-3/7$	$-5/7$	$13/7$
δ_j			0	0	$72/7$	$11/7$	$23/7$	1

	初表系数矩阵	迭代后表中系数矩阵	$B^{-1}\cdot$初表 = 迭代后表
初表基变量：x_5，x_6	$I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$B^{-1}=\begin{pmatrix}-1/7&4/7\\-5/7&13/7\end{pmatrix}$	
迭代后基变量：x_1，x_2	$B=\begin{pmatrix}13&-4\\5&-1\end{pmatrix}$	$I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$B^{-1}\cdot B=I$
不参与基变换变量：x_3，x_4	$N=\begin{pmatrix}5&-2\\1&-1\end{pmatrix}$	$N'=\begin{pmatrix}-1/7&-2/7\\-12/7&-3/7\end{pmatrix}$	$B^{-1}\cdot N=N'$
资源限量	$b=(20,8)^T$	$b'=(12/7,4/7)^T$	$B^{-1}\cdot b=b'$

题 1. 已知下表为求某一极大化问题的初始单纯形表和迭代计算中某一步的表，试求表中未知数 $a-l$ 的值。

c_j			1	6	-7	a	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	x_5	20	5	-4	13	b	1	0
0	x_6	8	j	-1	k	c	0	1
δ_j			1	6	-7	a	0	0

c_j			1	6	-7	a	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
-7	x_3	d	$-1/7$	0	1	$-2/7$	f	$4/7$
6	x_2	e	l	1	0	$-3/7$	$-5/7$	g
δ_j			$72/7$	0	0	$11/7$	h	i

微信扫一扫　4 小时速成课程

解：$a-\left[-7\times(-\frac{2}{7})+6\times(-\frac{3}{7})\right]=\frac{11}{7}\ \Rightarrow a=1$，　$1-\left[-7\times(-\frac{1}{7})+6l\right]=\frac{72}{7}\ \Rightarrow l=-\frac{12}{7}$

对于终表基变量：x_2，x_3

$$\begin{pmatrix} f & \frac{4}{7} \\ -\frac{5}{7} & g \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & 13 \\ -1 & k \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} f\cdot(-4)+\frac{4}{7}\cdot(-1)=0 \\ f\cdot 13+\frac{4}{7}\cdot k=1 \\ (-\frac{5}{7})\cdot(-4)+g\cdot(-1)=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f=-1/7 \\ g=13/7 \\ k=5 \end{cases}$$

对于未参与基变换的变量 x_1，x_4 及资源限量有：

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{7} & \frac{4}{7} \\ -\frac{5}{7} & \frac{13}{7} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & b \\ j & c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \\ -\frac{12}{7} & -\frac{3}{7} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} j=1 \\ b=-2 \\ c=-1 \end{cases}，\quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{7} & \frac{4}{7} \\ -\frac{5}{7} & \frac{13}{7} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 20 \\ 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix} \Rightarrow d=\frac{12}{7}, e=\frac{4}{7}$$

$$h=0-[(-7)\times(-\frac{1}{7})+6\times(-\frac{5}{7})]=\frac{23}{7}\ ，\quad i=0-[(-7)\times(\frac{4}{7})+\frac{20}{7}\times 6]=-\frac{50}{7}$$

故：$a=1, b=-2, c=-1, d=\frac{12}{7}, e=\frac{4}{7}, f=-\frac{1}{7}, g=\frac{13}{7},\ \ h=\frac{23}{7}, i=-\frac{50}{7}, j=1, k=5, l=-\frac{12}{7}$

题 2. 已知最优基的逆矩阵为 $B^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$，$C_B=(3,6)$，则对偶问题的最优解为____。

解：$Y^*=C_B\cdot B^{-1}=(3,6)\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}=(21,48)$

对偶问题最优解：$Y^*=C_B\cdot B^{-1}$

题 3. 已知某问题的最终单纯形表如下，请用 $Y^*=C_B\cdot B^{-1}$ 求其对偶问题的最优解。

c_j			2	1	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	15/2	0	0	1	5/4	−15/2
2	x_2	7/2	1	0	0	1/4	−1/2
1	x_1	3/2	0	1	0	−1/4	3/2
δ_j			0	0	0	−1/4	−1/2

解：$Y^*=C_B\cdot B^{-1}=(0,2,1)\cdot\begin{pmatrix} 1 & 5/4 & -15/2 \\ 0 & 1/4 & -1/2 \\ 0 & -1/4 & 3/2 \end{pmatrix}=\left(0,\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$

微信扫一扫　4 小时速成课程

2. 灵敏度分析

题 1. 已知以下问题，下表为该问题的最终单纯形表

$$\max z = 2x_1 + x_2$$

$$s.t.\begin{cases} 5x_2 \le 15 \\ 6x_1 + 2x_2 \le 24 \\ x_1 + x_2 \le 5 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

c_j			2	1	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	15/2	0	0	1	5/4	−15/2
2	x_1	7/2	1	0	0	1/4	−1/2
1	x_2	3/2	0	1	0	−1/4	3/2
δ_j			0	0	0	−1/4	−1/2

求：1）b_2增加4，变为28，原最优解有何变化？

2）假设b_2变为$24+\lambda$时，最优基不变的情况下，求λ允许的取值范围。

3）当$c_1 = 1.5$，$c_2 = 2$时，该问题最优解有何变化？

4）设$c_2 = 1+\lambda$，求最优解不变的条件下λ的取值范围？

解：1）$b' = B^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{4} & -\frac{15}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 \\ 28 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25/2 \\ 9/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$

将b'代入单纯形表：

c_j			2	1	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	25/2	0	0	1	5/4	−15/2
2	x_1	9/2	1	0	0	1/4	−1/2
1	x_2	1/2	0	1	0	−1/4	3/2
δ_j			0	0	0	−1/4	−1/2

故最优解变为$(\frac{9}{2}, \frac{1}{2}, \frac{25}{2}, 0, 0)$

2）$b' = B^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} 1 & 5/4 & -15/2 \\ 0 & 1/4 & -1/2 \\ 0 & -1/4 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 \\ 24+\lambda \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{15}{2} + \frac{5}{4}\lambda \\ \frac{1}{4}\lambda + \frac{7}{2} \\ -\frac{1}{4}\lambda + \frac{3}{2} \end{pmatrix} \ge 0 \quad \Rightarrow -6 \le \lambda \le 6$

最优基不变：$b' \ge 0$

微信扫一扫　4 小时速成课程

3）将 $c_1=1.5$,$c_2=2$ 代入终表

c_j			1.5	2	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	$15/2$	0	0	1	$5/4$	$-15/2$
1.5	x_1	$7/2$	1	0	0	$1/4$	$-1/2$
2	x_2	$3/2$	0	1	0	$-1/4$	$3/2$
δ_j			0	0	0	$1/8$	$-9/4$

因 $\delta_4=1/8>0$，不满足最优解的条件，故需继续迭代：

c_j			1.5	2	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_4	6	0	0	$4/5$	1	-6
1.5	x_1	2	1	0	$-1/5$	0	1
2	x_2	3	0	1	$1/5$	0	0
δ_j			0	0	$-1/10$	0	$-3/2$

所有检验数均 ≤ 0，得到最优解，最优解变为：$(2,3,0,6,0)$

4）将 $c_2=1+\lambda$ 代入终表后重新计算检验数得：

c_j			2	$1+\lambda$	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	$15/2$	0	0	1	$5/4$	$-15/2$
2	x_1	$7/2$	1	0	0	$1/4$	$-1/2$
$1+\lambda$	x_2	$3/2$	0	1	0	$-1/4$	$3/2$
δ_j			0	0	0	$-1/4+1/4\lambda$	$-1/2-3/2\lambda$

最优解不变：检验数 ≤ 0

$$\begin{cases} -\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\lambda \le 0 \\ -\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\lambda \le 0 \end{cases} \Rightarrow -\frac{1}{3}\le\lambda\le 1$$，故 $-\frac{1}{3}\le\lambda\le 1$ 时最优解不变

微信扫一扫　4 小时速成课程

课时四　练习题

1. 已知某求极大化线性规划问题用单纯形法求解时的初始单纯形表及最终单纯形表如表所示，求表中各括弧内未知数的值。

C_j			3	2	2	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	x_4	(b)	1	1	1	1	0	0
0	x_5	15	(a)	1	2	0	1	0
0	x_6	20	2	(c)	1	0	0	1
σ_j			3	2	2	0	0	0
⋮			⋮					
0	x_4	5/4	0	0	(d)	(l)	−1/4	−1/4
3	x_1	25/4	1	0	(e)	0	3/4	(i)
2	x_2	5/2	0	1	(f)	0	(h)	1/2
σ_j			0	(k)	(g)	0	−5/4	(j)

2. 企业生产甲、乙两种产品，需要用 A,B,C 三种资源，生产单位产品所需资源数，以及单位产品的利润，资源可利用量等数据如下表所示。问如何制定日生产计划，使两种产品总利润最大？

资源＼产品	甲	乙	资源限量
A	1	3	90
B	2	1	80
C	1	1	45
单位利润（万元）	5	4	

（1）试建立该问题的线性规划模型，并求出当该企业应生产两种产品各多少单位时，获取的利润为最大。

（2）试给出该问题中三种资源的 A,B,C 影子价格。如果在限额外购买三种资源，应优先购买哪种资源？

（3）试确定最优基不变时，资源 C 拥有量 b_3 的变化范围。

（4）试确定最优解不变时，产品乙单位利润 c_2 的变化范围。

微信扫一扫　4 小时速成课程

课时五　运输问题

考点	重要程度	占分	常见题型
1. 运输问题的表上作业法	必考	10～15	大题
2. 非标准运输问题	★★★	0～10	大题

1. 运输问题的表上作业法

题 1. 某部门有 3 个生产同类产品的工厂，生产的产品由 4 个销售点出售，各工厂的生产量，各销售点的销售量以及工厂到各销售点的单位运价（元/t）示于表中：

产地＼销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	4	12	4	11	16
A_2	2	10	3	9	10
A_3	8	5	11	6	22
销量	8	14	12	14	

1）分别用最小元素法和伏格尔法确定初始调运方案；

2）分别用闭回路法和位势法计算检验数；

3）用闭回路法对初始运输方案进行调整，求出最优解。

解：1）最小元素法：优先满足单位运价最小的供销业务。

产地＼销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	4	12	10　4	6　11	16
A_2	8　2	10	2　3	9	10
A_3	8	14　5	11	8　6	22
销量	8	14	12	14	48

初始调运方案为：

$A_1 \to B_3$　10　　$A_1 \to B_4$　6　　$A_2 \to B_1$　8

$A_2 \to B_3$　2　　$A_3 \to B_2$　14　　$A_3 \to B_4$　8

有 m 个产地和 n 个销地，初始解一定有 $m+n-1$ 个数字格。

微信扫一扫　4 小时速成课程

伏格尔法（最大差额法）：对差额最大处采用运费调运

销地 / 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量	行罚数 1	2	3	4	5
A_1	4	12	12 4	4 11	16	0	0	0	7	0
A_2	8 2	10	3	2 9	10	1	1	1	6	0
A_3	8	14 5	11	8 6	22	1	2			
销量	8	14	12	14	48					
列罚数 1	2	5	1	3						
列罚数 2	2		1	3						
列罚数 3	2		1	2						
列罚数 4			1	2						
列罚数 5				2						

罚数＝次小运价－最小运价

初始调运方案为：

$A_1 \to B_3$　12　　$A_1 \to B_4$　4　　$A_2 \to B_1$　8

$A_2 \to B_4$　2　　$A_3 \to B_2$　14　　$A_3 \to B_4$　8

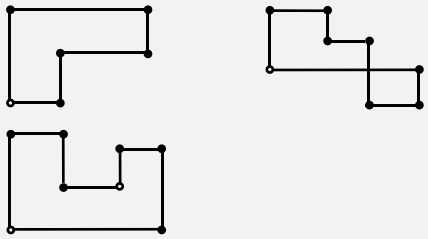
2）闭回路法：

销地 / 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	4	12 10	4	6 11	16
A_2	8 2	10 2	3	9	10
A_3	8	14 5	11	8 6	22
销量	8	14	12	14	48

闭回路画法：

从空格出发画水平/垂直直线，遇到填运量的方格可以转90°继续前进，直至出发空格形成闭合回路。

常见闭回路形式：



$$\delta_{11} = c_{11} - c_{13} + c_{23} - c_{21} = 4 - 4 + 3 - 2 = 1$$

$$\delta_{12} = c_{12} - c_{32} + c_{34} - c_{14} = 12 - 5 + 6 - 11 = 2$$

$$\delta_{22} = c_{22} - c_{23} + c_{13} - c_{14} + c_{34} - c_{32} = 10 - 3 + 4 - 11 + 6 - 5 = 1$$

$$\delta_{24} = c_{24} - c_{14} + c_{13} - c_{23} = 9 - 11 + 4 - 3 = -1$$

$$\delta_{31} = c_{31} - c_{21} + c_{23} - c_{13} + c_{14} - c_{34} = 8 - 2 + 3 - 4 + 11 - 6 = 10$$

$$\delta_{33} = c_{33} - c_{34} + c_{14} - c_{13} = 11 - 6 + 11 - 4 = 12$$

微信扫一扫　4 小时速成课程

位势法（对偶变量法）：增加行位势和列位势

销地 / 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量	u_i
A_1	4	12	10 4	6 11	16	u_1
A_2	8 2	10	2 3	9	10	u_2
A_3	8	14 5	11	8 6	22	u_3
销量	8	14	12	14	48	
v_j	v_1	v_2	v_3	v_4		

位势法解题步骤：

1. 增加行位势、列位势；
2. 计算基变量检验数，求位势；
   检验数＝运价－(列位势＋行位势)
3. 计算非基变量检验数。

计算基变量检验数，求位势：

$$\begin{cases}0=4-(u_1+v_3)\\0=11-(u_1+v_4)\\0=2-(u_2+v_1)\\0=9-(u_2+v_3)\\0=5-(u_3+v_2)\\0=6-(u_3+v_4)\end{cases}$$，设 $u_1=1$，代入得：$$\begin{cases}0=4-(1+v_3)\\0=11-(1+v_4)\\0=2-(u_2+v_1)\\0=9-(u_2+v_3)\\0=5-(u_3+v_2)\\0=6-(u_3+v_4)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}v_1=2\\v_2=9\\v_3=3\\v_4=10\\u_2=0\\u_3=-4\end{cases}$$

解方程组时，需指定某一位势等于某较小整数

计算非基变量检验数：

$\delta_{11}=c_{11}-(u_1+v_1)=1$　　$\delta_{12}=c_{12}-(u_1+v_2)=2$　　$\delta_{22}=c_{22}-(u_2+v_2)=1$

$\delta_{24}=c_{24}-(u_2+v_4)=-1$　　$\delta_{31}=c_{31}-(u_3+v_1)=10$　　$\delta_{33}=c_{33}-(u_3+v_3)=12$

3）解的改进：

	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	4	12	10 (+2) 4	6 (−2) 11	16
A_2	8 2	10	2 (−2) 3	(+2) 9	10
A_3	8	14 5	11	8 6	22
销量	8	14	12	14	48

解改进的步骤：

1. 在检验数＜0 的空格，找出闭回路
2. 从空格开始对闭回路顶点依次编号
3. 确定偶数顶点处最小运量 a
4. 奇数顶点：运输量 $-a$
   偶数顶点：运输量 $+a$
5. 最优性检验：若不是最优解，重复以上步骤直至得出最优解。

调整闭回路顶点处运量得：

	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	4	12	12 4	4 11	16
A_2	8 2	10	3	2 9	10
A_3	8	14 5	11	8 6	22
销量	8	14	12	14	48

微信扫一扫　4 小时速成课程

计算非基变量检验数得：$\delta_{11}=0,\delta_{12}=2,\delta_{22}=2,\delta_{23}=1,\delta_{31}=9,\delta_{33}=12$，

所有检验数均≥ 0，故得到最优解。最优调运方案为：

$A_1\to B_3$　12　　$A_1\to B_4$　4　　$A_2\to B_1$　8　　$A_2\to B_4$　2　　$A_3\to B_2$　14　　$A_3\to B_4$　8

2. 非标准运输问题

题 1. 某市有三个造纸厂 A_1、A_2、A_3，其纸的产量分别为 8 个单位、5 个单位和 9 个单位，有 4 个集中用户 B_1、B_2、B_3、B_4，产量和需求量及单位运价如下表：

产地＼销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	3	12	3	4	8
A_2	11	2	5	9	5
A_3	6	7	1	5	9
销量	4	3	5	6	

确定总运费最少的调运方案（只列出表格即可）。

解：总产量＞总销量，增加虚拟销地 B_5

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	产量
A_1	3	12	3	4	0	8
A_2	11	2	5	9	0	5
A_3	6	7	1	5	0	9
销量	4	3	5	6	4	

产销不平衡运输问题：

总产量＞总销量：增加一个虚拟销地

总产量＜总销量：增加一个虚拟产地

虚拟销地/产地运价为运价为 0

题 2. 三个化肥厂 A、B、C 供应四个地区，甲乙丙丁需求量产量及运价如下表。试求运费最节省的方案。（只建立表格）

化肥厂＼需求地	甲	乙	丙	丁	产量
A	16	13	22	17	50
B	14	13	19	15	60
C	19	20	23	–	50
最低需求	30	70	0	10	
最高需求	50	70	30	不限	

微信扫一扫　4 小时速成课程

解：将需求量分为必须满足和可满足两部分。最低需求必须满足，不能由虚拟产地提供，故虚拟产地至最低需求运价设为无穷大正数 M 。

C 无法运到丁地区，故运价设为 M 。

化肥厂＼需求地	甲$_1$	甲$_2$	乙	丙	丁$_1$	丁$_2$	产量
A	16	16	13	22	17	17	50
B	14	14	13	19	15	15	60
C	19	19	20	23	M	M	50
D	M	0	M	0	M	0	50
销量	30	20	70	30	10	50	

课时五　练习题

1. 某公司从三个产地 (A_1-A_3) 将物品运往四个销地 (B_1-B_4)，各产地的产量、销地的销量和每件物品的运费（万元）如下表所示。

产地/销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	3	2	7	6	50
A_2	7	5	2	3	60
A_3	2	5	4	5	25
销量	60	40	20	15	

（1）用最小元素法求初始调运方案；（2）求出该问题的最后调运方案和最低运费。

2. 如下表中列出了产地 A_1,A_2,A_3 到销地 B_1,B_2,B_3,B_4 的产品单位运费及产地与销地的产品供给量和需求量：

产地＼销地	B_1	B_2	B_3	B_4	供应量
A_1	3	11	3	10	7
A_2	1	9	2	8	4
A_3	7	4	10	5	9
需求量	3	6	5	6	

（1）用最大差额法求初始调运方案；（2）画出表格，利用位势法，求出每一个运输空格的检验数，并判断初始方案是否需要调整，如需要则进行调整，如不需要则给出最优运输费用。

微信扫一扫　4 小时速成课程

3. 有 6 个产地和 5 个销地的平衡运输问题有_____个基变量_____个约束条件。

4. 设运输问题求最大值，则当所有检验数_____取得最优方案。

5. 具有 m 个产地 n 个销地的平衡运输问题模型具有特征（　）。

A. 有 mn 个变量，$m+n$ 个约束　　B. 有 $m+n$ 个变量，mn 个约束

C. 有 mn 个变量，$m+n-1$ 个约束　　D. 有 $m+n-1$ 基变量和非基变量

6. 对不平衡运输问题，如总销量小于总产量，则不需要做的是（　）。

A. 虚设一个销地　　B. 删去一个产地

C. 令产地到虚设的销地的单位运费为 0　　D. 取虚设的销地的需求量恰当值

7. 求解运输问题，图中为单位运价和产量销量，下面说法正确的是（　）。

产地＼销地	B_1	B_2	B_3	B_4	销量
A_1	7	8	3	2	10
A_2	7	4	5	1	90
A_3	4	2	9	6	40
销量	10	30	60	50	

A. 增加运费为 M 的产地　　B. 增加运费为 M 的销地

C. 增加运价为 0 的产地　　D. 增加运价为 0 的销地

微信扫一扫　4 小时速成课程

课时六　目标规划

考点	重要程度	占分	题型
1. 目标规划问题的建模	必考	5～10	大题
2. 目标规划问题图解法	★★★★	5～10	大题

1. 目标规划问题的建模

1. 偏差变量：

正偏差 d^+：超过目标值的部分，$d^+ \geq 0$；

负偏差 d^-：不足目标值的部分，$d^- \geq 0$。

$d^+ \times d^- = 0$

2. 约束：1）绝对约束：$2x_1 + x_2 \leq 11$；　　2）目标约束：$x_1 - x_2 + d^- - d^+ = 0$。

3. 优先因子（优先级）P_k：$P_1 >> P_2 >> P_3 >> \cdots$

4. 权系数：区分具有相同优先级的两个目标

5. 目标函数：

恰好达到目标值：$\min z = f(d^+, d^-)$；　　不超过目标值：$\min z = f(d^+)$；

超过目标值：$\min z = f(d^-)$。

题 1. 某工厂生产 A, B 两种产品，已知有关数据如下：

	产品 A	产品 B	资源
原材料	2	1	$11kg$
设备	1	2	$10h$
利润	8	10	

工厂作方案决策时，决策者在原材料供应受严格限制的基础上，同时要考虑市场条件：

•产品 A 的销售量有下降趋势，故 A 的产量不大于 B 的产量；

•应尽可能充分利用设备台时，但不希望加班；

•应尽可能达到并超过计划利润指标 56 元。

试建立此问题的目标规划数学模型。

解：设 A、B 产品分别生产 x_1、x_2 件

$$\min z = p_1 d_1^+ + p_2(d_2^- + d_2^+) + p_3 d_3^-$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 11 \\ x_1 - x_2 + d_1^- - d_1^+ = 0 \\ x_1 + 2x_2 + d_2^- - d_2^+ = 10 \\ 8x_1 + 10x_2 + d_3^- - d_3^+ = 56 \\ x_1, x_2, d_i^-, d_i^+ \geq 0, i = 1,2,3 \end{cases}$$

微信扫一扫　4 小时速成课程

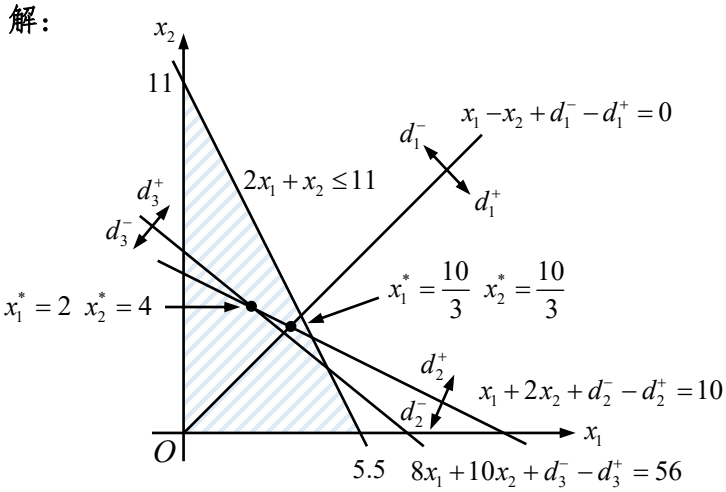
2. 目标规划图解法

题 1. 用图解法求解以下目标规划问题：

$$\min z = p_1 d_1^+ + p_2(d_2^- + d_2^+) + p_3 d_3^-$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 11 \\ x_1 - x_2 + d_1^- - d_1^+ = 0 \\ x_1 + 2x_2 + d_2^- - d_2^+ = 10 \\ 8x_1 + 10x_2 + d_3^- - d_3^+ = 56 \\ x_1, x_2, d_i^-, d_i^+ \ge 0, i = 1,2,3 \end{cases}$$

解：



斜率 > 0：向上为 d^-，向下为 d^+

斜率 < 0：向上为 d^+，向下为 d^-

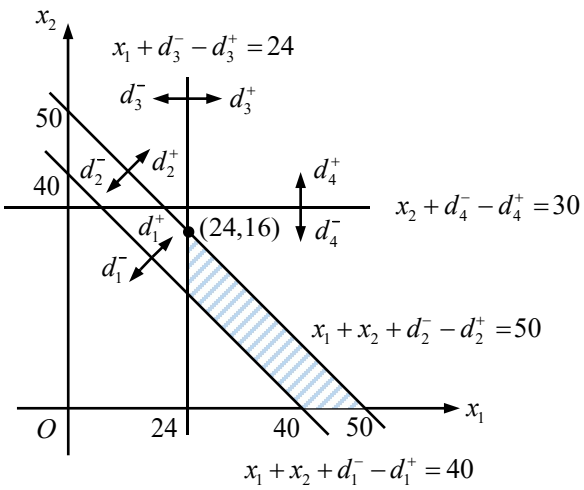
满意解为 $(\frac{10}{3}, \frac{10}{3})$，$(2,4)$ 线段上所有点

题 2. 用图解法求解以下目标规划问题：

$$\min z = p_1 d_1^- + p_2 d_2^+ + p_3(2d_3^- + d_4^-)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + d_1^- - d_1^+ = 40 \\ x_1 + x_2 + d_2^- - d_2^+ = 50 \\ x_1 + d_3^- - d_3^+ = 24 \\ x_2 + d_4^- - d_4^+ = 30 \\ x_1, x_2, d_i^-, d_i^+ \ge 0, i = 1,2,3,4 \end{cases}$$

解：



满意解为 $(24,16)$

微信扫一扫　4 小时速成课程

课时六　练习题

1. 某电视机厂装配 A 和 B 两种型号的电视机，每装配一台电视机需占用装配线1小时，装配线每周计划开动40小时。预计市场每周 A 电视的销量是24台，每台可获利80元；B 电视机每周销量30台，每台获利40元。该厂按预测的销量制定生产计划，其目标为：

第一优先级：充分利用装配线每周计划开动40小时

第二优先级：允许装配线加班，但加班时间每周尽量不超过10小时

第三优先级：装配电视机的数量尽可能满足市场需求。因 A 电视机利润高，取其权系数为2。

试建立该问题的目标规划模型。

2. 用图解法求下面目标规划问题。

$$\min z = p_1 d_1^- + p_2(2d_2^+ + d_3^+)$$

$$s.t\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + d_1^- - d_1^+ = 30 \\ x_2 + d_2^- - d_2^+ = 4 \\ x_1 + d_3^- - d_3^+ = 6 \\ x_1, x_2, d_i^-, d_i^+ \geq 0 (i = 1,2,3) \end{cases}$$

微信扫一扫　4 小时速成课程

课时七　整数规划

考点	重要程度	占分	常见题型
1. 整数规划数学模型	★★★★★	0～15	大题
2. 割平面法	★★★★★	0～5	填空、选择
3. 分支定界法	★★★★★	0～10	填空、选择、大题
4. 指派问题	必考	10～15	大题

1. 整数规划数学模型

题 1. 某服务部门各时段（每 $2h$ 为一个时段）需要的服务人员见下表。按规定，服务员连续工作 $8h$（即四个时段）为一班。现要求安排服务员的工作时间，使服务部门服务员工总数最少，建立该问题的整数规划模型。

时段	1	2	3	4	5	6	7	8
服务员最少数目	10	8	9	11	13	8	5	3

解：设在第 j 时段开始时上班的服务员人数为 x_j，故决策变量只需要考虑 x_1,x_2,x_3,x_4,x_5

$$\min z = x_1+x_2+x_3+x_4+x_5$$

$$\begin{cases} x_1 \ge 10 \\ x_1+x_2 \ge 8 \\ x_1+x_2+x_3 \ge 9 \\ x_1+x_2+x_3+x_4 \ge 11 \\ x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 \ge 0 \text{且均为整数} \end{cases} \qquad \begin{array}{l} x_2+x_3+x_4+x_5 \ge 13 \\ x_3+x_4+x_5 \ge 8 \\ x_4+x_5 \ge 5 \\ x_5 \ge 3 \end{array}$$

题 2. 建立下述问题的 $0-1$ 型整数线性规划模型：某单位计划从 B_i，$(i=1,2,\cdots 10)$ 10 个可供选择的地方中筹建 6 个分公司，相应的建设费为 c_i，$(i=1,2,\cdots 10)$，并规定：1）B_1,B_3,B_6 中最多选一个；2）B_2,B_4 中最少选一个；3）B_7,B_9 中最少选一个；4）B_5,B_8,B_{10} 中最少选两个，求筹建费用最少的方案。

解：每个地方均有选择和不被选择两种可能，$x_i = \begin{cases} 1 & \text{选择该地建分公司} \\ 0 & \text{不选择该地建分公司} \end{cases}$　$i=1,2,\cdots 10$

$$\max z = \sum_{i=1}^{10} c_i X_i$$

$$\begin{cases} x_1+x_3+x_6 \le 1 \\ x_2+x_4 \ge 1 \\ x_7+x_9 \ge 1 \\ x_5+x_8+x_{10} \ge 2 \\ x_i = 0 \text{或} 1 (i=1,2\cdots 10) \end{cases}$$

微信扫一扫　4 小时速成课程

2. 割平面法

题 1. 已知某整数规划问题其松弛问题的最终单纯形表如下所示，写出该问题的割平面方程_____。

x			1	1	0	0
C_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4
1	x_1	3/4	1	0	−1/4	1/4
1	x_2	7/4	0	1	3/4	1/4
δ_j			0	0	−1/2	−1/2

解：$\begin{cases} x_1 - \frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4 = \frac{3}{4} \\ x_2 + \frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4 = \frac{7}{4} \end{cases}$

将系数、常数项化为整数与非负真分数形式

$$\begin{cases} x_1 + \frac{3}{4}x_2 - x_3 + \frac{1}{4}x_4 = \frac{3}{4} \\ x_2 + \frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4 = 1 + \frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_3 = \frac{3}{4} - \frac{3}{4}x_3 - \frac{1}{4}x_4 \\ x_2 - 1 = \frac{3}{4} - \frac{3}{4}x_3 - \frac{1}{4}x_4 \end{cases}$$

$$\frac{3}{4} - \frac{3}{4}x_3 - \frac{1}{4}x_4 \le 0 \quad \Rightarrow -3x_3 - x_4 \le -3 \quad \Rightarrow 3x_3 + x_4 - x_5 = 3$$

该问题的割平面方程为：$3x_3 + x_4 - x_5 = 3$

3. 分支定界法

题 1. 用分支定界法求解：

$\max z = x_1 + x_2$

$$\begin{cases} x_1 + \frac{9}{14}x_2 \le \frac{51}{14} \\ -2x_1 + x_2 \le \frac{1}{3} \\ x_1, x_2 \ge 0 \text{且为整数} \end{cases}$$

解题步骤：

1）求松弛问题的最优解；

2）分支与定界：

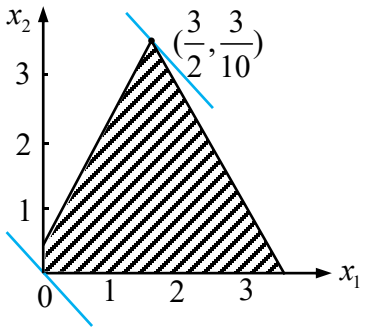
任意一个非整数解的变量 x_i，

在松弛问题中加上约束：

$x_i \le [x_i]$ 和 $x_i \ge [x_i] + 1$

3）找出最优解。

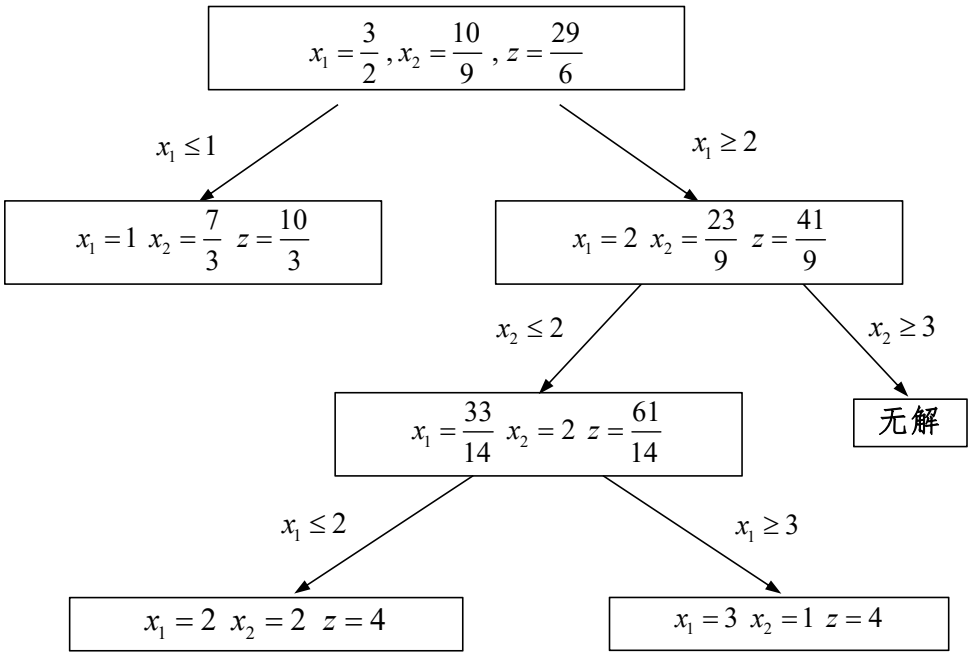
解：1）求松弛问题的最优解：



最优解为：$x_1 = \frac{3}{2}$，$x_2 = \frac{3}{10}$，$z = \frac{29}{6}$

微信扫一扫　4 小时速成课程

2）分支定界



3）最优解为 $x_1=2, x_2=2, z=4$ 或 $x_1=3, x_2=1, z=4$

4. 指派问题

题 1. 求所示效率矩阵的指派问题的最小解。

人员＼任务	A	B	C	D	E
甲	12	7	9	7	9
乙	8	9	6	6	6
丙	7	17	12	14	9
丁	15	14	6	6	10
戊	4	10	7	10	9

匈牙利法解题步骤：

1. 变换系数矩阵；
2. 圈出和划掉所有 0 元素；
   ⓪的数目＝矩阵阶数，已得最优解
   ⓪的数目＜矩阵阶数，转入 3
3. 以最少的直线覆盖所有 0 元素；
4. 找无直线覆盖部分最小元素，
   进行矩阵变换。

解：
$$\begin{pmatrix} 12 & 7 & 9 & 7 & 9 \\ 8 & 9 & 6 & 6 & 6 \\ 7 & 17 & 12 & 14 & 9 \\ 15 & 14 & 6 & 6 & 10 \\ 4 & 10 & 7 & 10 & 9 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 5 & 7 & 2 \\ 9 & 8 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 6 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 5 & 7 & 2 \\ 9 & 8 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 6 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ \checkmark \\ \\ \checkmark \end{array} \\ \checkmark \end{array} \quad \begin{pmatrix} 7 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 3 & 5 & 0 \\ 11 & 8 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

作直线覆盖 0 元素步骤：

1. 没有⓪的行打 √
2. 对打 √ 的行中所有含 0 的列打 √
3. 对打 √ 的列中含⓪的行打 √
4. 重复 2,3，直至得不到新的打 √ 的行/列
5. 无 √ 行划横线，有打 √ 列划竖线

甲 $\to B$，丁 $\to C$，乙 $\to D$，戊 $\to A$，丙 $\to E$

微信扫一扫　4 小时速成课程

非标准指派问题：

1）极大化问题

找出系数矩阵中最大的数 a

用 a 分别减去各元素得到新的系数矩阵，化为极小化问题再求解。

例：$\begin{pmatrix} 5 & 8 & 9 \\ 10 & 15 & 17 \\ 9 & 4 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 12 & 9 & 8 \\ 7 & 2 & 0 \\ 8 & 3 & 14 \end{pmatrix}$

2）人数与任务数不等：虚拟任务或虚拟人员

例：$\begin{pmatrix} 5 & 8 & 9 \\ 10 & 15 & 17 \\ 9 & 4 & 3 \\ 16 & 17 & 18 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 5 & 8 & 9 & 0 \\ 10 & 15 & 17 & 0 \\ 9 & 4 & 3 & 0 \\ 16 & 17 & 18 & 0 \end{pmatrix}$

3）不可接受的配置

某人不能完成某项任务：令其对应的效率为一个无穷大的数 M

	A	B	C	D
甲	3	1	2	4
乙	1	3	–	1
丙	2	1	3	5
丁	–	4	2	3

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 9 & 0 \\ 1 & 3 & M & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 0 \\ M & 17 & 18 & 0 \end{pmatrix}$$

4）一个人可以做多件事

若某人可做多件事，则可将该人化作相同的 n 个人来接受指派。

	A	B	C	D
甲	3	1	2	4
乙	1	3	6	5
丙	2	4	1	8

$$\begin{pmatrix} \boxed{3 \quad 1 \quad 2 \quad 4} \\ 1 \quad 3 \quad 6 \quad 5 \\ 2 \quad 4 \quad 1 \quad 8 \\ \boxed{3 \quad 1 \quad 2 \quad 4} \end{pmatrix}$$

假设甲可同时完成两项任务：

微信扫一扫　4 小时速成课程

课时七　练习题

1. 某宾馆有正式工服务员30名，每天各时间段(每$4h$为一个时间段) 所需的服务员人数如下表所示。已知有15名服务员每天6点上班14点下班；另有15名服务员14点上班22点下班。问该宾馆至少需要再招多少名临时工服务员才能满足需要（要求这些临时工服务员在某一时段开始上班后要连续工作$8h$）？建立该问题的数学模型。（无需求解）

班次	时间段	所需人数	班次	时间段	所需人数
1	$6:00-10:00$	70	4	$18:00-22:00$	60
2	$10:00-14:00$	90	5	$22:00-2:00$	30
3	$14:00-18:00$	70	6	$2:00-6:00$	40

2. 采用割平面法求解整数规划问题过程中，如果松弛问题的最优单纯形表的某方程为：$x_1+\frac{1}{7}x_3+\frac{2}{7}x_4=\frac{13}{7}$，根据该方程构造的割平面方程为_____。

3. 已知整数规划问题：

$$\max z=3x_1-x_2$$

$$s.t\begin{cases}3x_1-2x_2\le 3\\2x_1+x_2\le 5\\x_1,x_2\ge 0\text{且为整数}\end{cases}$$

（1）用图解法求对应松弛问题的最优解；

（2）用分支定界法求该问题的最优解。

4. 求所示效率矩阵（数值为成本）的指派问题的最小值。

人员＼任务	A	B	C	D	E
甲	3	8	2	10	3
乙	8	7	2	9	7
丙	6	4	2	7	5
丁	8	4	2	3	5
戊	9	10	6	9	10

5. 求解极大化指派问题：$A=\begin{bmatrix}2&8&6&5\\4&2&6&8\\7&3&8&3\\6&4&9&3\end{bmatrix}$。

微信扫一扫　4 小时速成课程

课时八　动态规划

考点	重要程度	占分	题型
1. 基本概念与建模	★★★★★	0～10	大题
2. 动态规划问题求解	★★★★	0～10	大题

1. 基本概念与建模

题 1. 某公司有资金10万元，若投资于项目$i(i=1,2,3)$的投资额为x_i，其收益分别为$g(x_1)=4x_1$，$g(x_2)=9x_2$，$g(x_3)=2x_3^2$，问应如何分配投资数额才能使总收益最大？建立动态规划模型。

解：阶段：将本问题划分为$k=1,2,3$三个阶段，分别代表给项目1,2,3进行投资；

状态变量s_k：第k阶段开始时可以投资于第k个到第3个项目的资金；

决策变量x_k：决定给第k个项目投资的资金；

状态转移方程：$s_{k+1}=s_k-x_k$；

最优指标函数$f_k(s_k)$：当可投资金为s_k时，投资第k至3项所得的最大收益。

基本方程为：$\begin{cases} f_k(s_k)=\max\limits_{0\le x_k\le s_k}\left[g_k(x_k)+f_{k+1}(s_k-x_k)\right], k=3,2,1 \\ f_4(s_4)=0\text{（边界条件）} \end{cases}$

2. 动态规划问题求解

题 1. 某公司拟得5台某种设备分配给所属的甲，乙，丙三个工厂，各工厂可以为公司获得的利润如下表所示。试问这5台设备如何分配给各公司获得的总利润最大？其总利润是多少？请用动态规划法分析求解。

设备数＼工厂	甲	乙	丙
0	0	0	0
1	3	5	4
2	7	10	6
3	9	11	11
4	12	11	12
5	13	11	12

微信扫一扫　4 小时速成课程

解：阶段：将本问题按照给甲、乙、丙三个工厂投资的顺序分为三个阶段，$k=1,2,3$

状态变量s_k：分配给第k个工厂至第3个工厂的设备台数；

决策变量x_k：分配给第k个工厂的设备台数；

状态转移方程：$s_{k+1}=s_k-x_k$；

阶段指标函数$g_k(x_k)$：分配给第k个工厂x_k台设备的盈利值；

最优指标函数$f_k(s_k)$：s_k台设备分配给第k个工厂到第3个工厂时所得最大盈利值

基本方程为：$\begin{cases} f_k(s_k)=\max\limits_{0\le x_k\le s_k}\left[g_k(x_k)+f_{k+1}(s_k-x_k)\right], k=3,2,1 \\ f_4(s_4)=0\text{（边界条件）} \end{cases}$

第三阶段：

s_3 \ x_3	$g_3(x_3)$						$f_3(s_3)$	x_3^*
	0	1	2	3	4	5		
0	0						0	0
1		4					4	1
2			6				6	2
3				11			11	3
4					12		12	4
5						12	12	5

第二阶段：

s_2 \ x_2	$g(x_2)+f_3(s_2-x_2)$						$f_2(s_2)$	x_2^*
	0	1	2	3	4	5		
0	0						0	0
1	$0+4$	$5+0$					5	1
2	$0+6$	$5+4$	$10+0$				10	2
3	$0+11$	$5+6$	$10+4$	$11+0$			14	2
4	0+12	5+11	10+6	11+4	11+0		16	1,2
5	0+12	5+12	10+11	11+6	11+4	11+0	21	2

第一阶段：

s_1 \ x_1	$g(x_1)+f_2(s_1-x_1)$						$f_1(5)$	x_1^*
	0	1	2	3	4	5		
0	0+21	3+16	7+14	9+10	12+5	13+0	21	0,2

最优方案为:甲0台，乙2台，丙3台 或:甲2台，乙2台，丙1台

微信扫一扫　4小时速成课程

课时八　练习题

1. 某公司有3台新设备，将有选择的分配给3个工厂，每个工厂的利润增长额与所分配到的新设备台数有关，各工厂在获得不同台数新设备时能增加的利润如下所示，问应如何分配这些新设备使公司的利润增长额最大？最大利润增长额是多少？（利用动态规划方法求解）

利润单位：万元

工厂＼新设备台数	0	1	2	3
1	0	4.5	7	9
2	0	2	4.5	7.5
3	0	5	7	8

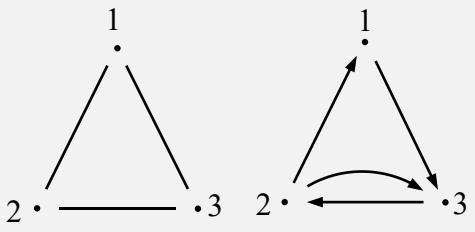
微信扫一扫　4小时速成课程

课时九　图与网络分析

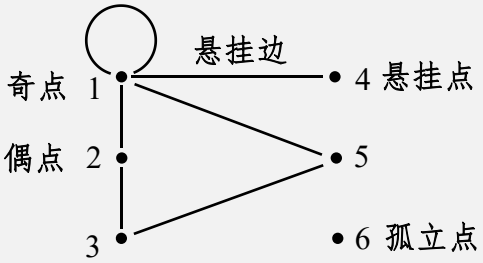
考点	重要程度	占分	常见题型
1. 基本知识	★★★★★	2～5	填空/选择/判断
2. 最小支撑树	★★★★	5～10	大题
3. 最短路	必考	10～15	大题
4. 最大流	必考	10～15	大题

1. 基本知识

简单图：不含环和多重边



顶点的次 $d(v_i)$：以顶点 v_i 为端点的边数（环记 2 次）



$d(1)=5$

$d(2)=2$

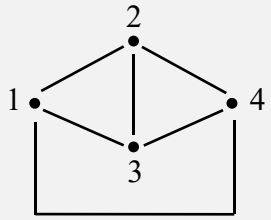
完全图：每对顶点都有边相连的无向简单图

连通图中：顶点次数总和＝边数的 2 倍

奇点的个数为偶数

题 1. 不含环和多重边的图称为_____。

答案：简单图

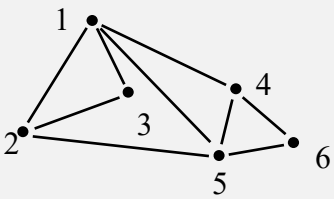


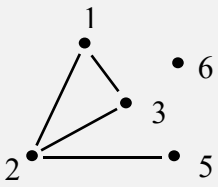
链：前后相继的点边交错序列

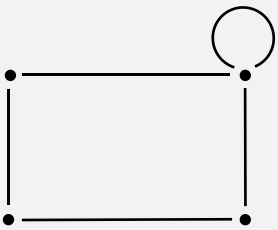
圈：起点和终点重合的链

初等链	初等圈	没有重复的点和边
简单链	简单圈	没有重复的边

连通图：任意两点间至少有一条链：







欧拉路径：只通过每条边一次的路径；

欧拉回路：起点和终点是同一点的欧拉路径；

欧拉图：一笔画出的边不重复的回路（具有欧拉回路的图）。

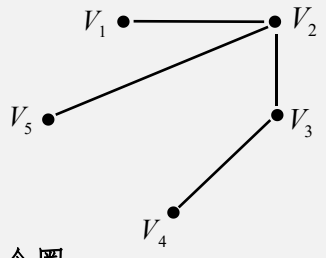
微信扫一扫　4 小时速成课程

题 2. 具有欧拉回路的图为_____。

答案：欧拉图

树：无圈的连通图。树的性质：

- 任何树至少有两个悬挂节点；
- 树有 m 个节点，则有 $m-1$ 条边；
- 树中任意两个节点之间只有唯一一条链；
- 树的任意两个不相邻的节点之间增加一条边，则形成唯一的一个圈；
- 树中去掉一条边，则余下的图是不连通的。

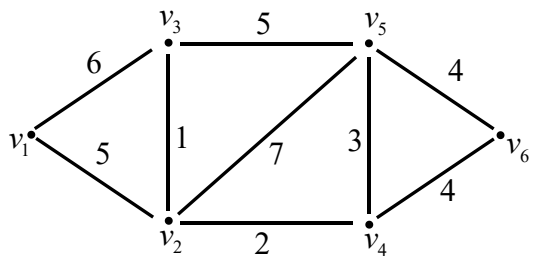


题 3. 一棵树若有 n 个顶点，m 条边，则 n 与 m 的关系_____。

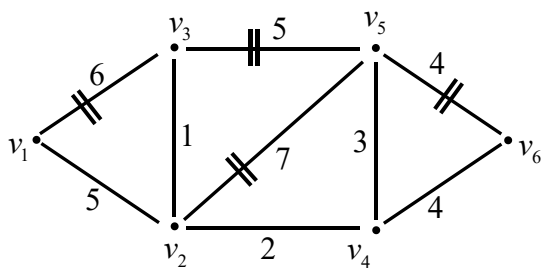
答案：$m=n-1$

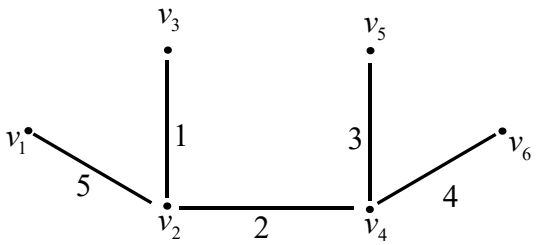
2. 最小支撑树

题 1. 某工厂内连续六个车间的道路网如图所示，已知每条道路的长，要求沿道路架设连接六个车间的电话线网，使电话线的总长最小。



解：



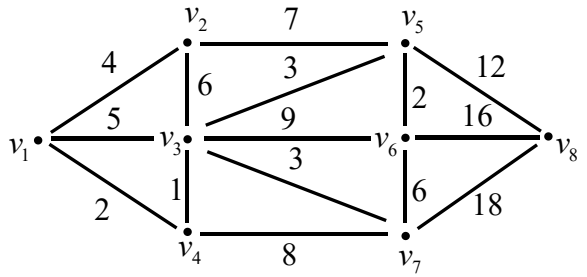


最小总长为15

3. 最短路

微信扫一扫　4 小时速成课程

题 1. 求下图中 v_1 到各点的最短距离及路线。



解：给 v_1 点 P 标号：$P(v_1)=0$，v_2 至 v_8 点 T 标号：$T(v_i)=+\infty(i=2\cdots8)$

$T(v_3)=\min\left[T(v_3),P(v_1)+l_{13}\right]=\min\left[+\infty,0+5\right]=5$

$T(v_4)=\min\left[T(v_4),P(v_1)+l_{14}\right]=\min\left[+\infty,0+2\right]=2$

v_4 点 P 标号：$P(v_4)=2$，

$T(v_3)=\min\left[T(v_3),P(v_4)+l_{43}\right]=\min\left[5,2+1\right]=3$

$T(v_7)=\min\left[T(v_7),P(v_4)+l_{47}\right]=\min\left[+\infty,2+8\right]=10$

给 v_3 点 P 标号：$P(v_3)=3$，

$T(v_2)=\min\left[T(v_2),P(v_3)+l_{32}\right]=\min\left[4,3+6\right]=4$

$T(v_5)=\min\left[T(v_5),P(v_3)+l_{35}\right]=\min\left[+\infty,3+3\right]=6$

$T(v_6)=\min\left[T(v_6),P(v_3)+l_{36}\right]=\min\left[+\infty,3+9\right]=12$

$T(v_7)=\min\left[T(v_7),P(v_3)+l_{37}\right]=\min\left[10,3+3\right]=6$

给 v_2 点 p 标号：$p(v_2)=4$，

$T(v_5)=\min\left[T(v_5),P(v_2)+l_{25}\right]=\min\left[6,4+7\right]=6$

给 v_5 点 P 标号：$P(v_5)=6$，

$T(v_6)=\min\left[T(v_6),P(v_5)+l_{56}\right]=\min\left[12,6+2\right]=8$

$T(v_8)=\min\left[T(v_8),P(v_5)+l_{58}\right]=\min\left[+\infty,6+12\right]=18$

给 v_7 点 P 标号：$P(v_7)=6$，

$T(v_6)=\min\left[T(v_6),P(v_6)+l_{76}\right]=\min\left[8,6+6\right]=8$

$T(v_8)=\min\left[T(v_8),P(v_7)+l_{78}\right]=\min\left[18,6+18\right]=18$

微信扫一扫　4 小时速成课程

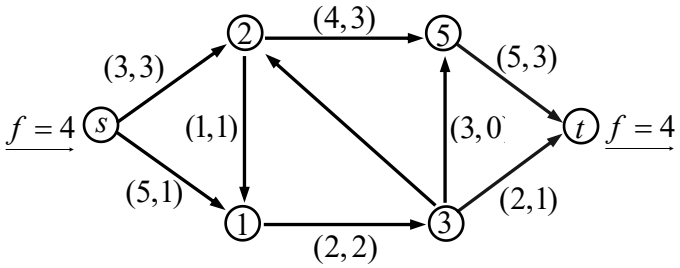
给 v_6 点 P 标号：$P(v_6)=8$，

$T(v_8)=\min\left[T(v_8),P(v_6)+l_{68}\right]=\min\left[18,8+16\right]=18$

给 v_8 标号 $P(v_8)=18$，最短距离为 18，路径为 $v_1\to v_4\to v_3\to v_5\to v_8$

4. 最大流

题 1. 求下图所示网络图的最大流，最小截集。



可标号原则：

正向弧：容量 $c>$ 流量 f

反向弧：流量 $f>0$

解：v_s 标上 $(0,+\infty)$，检查 v_s：

(v_s,v_2) 上，$c_{s2}=f_{s2}=3$，不可标号；(v_s,v_1) 上，$c_{s1}=5,f_{s1}=1,c_{s1}>f_{s1}$，可标号；

则 v_1 标号为 $(v_s,l(v_1))$，其中 $l(v_1)=\min\left[l(v_s),(c_{s1}-f_{s1})\right]=\min\left[+\infty,5-1\right]=4$。

检查 v_1：(v_1,v_3) 上，$c_{13}=f_{13}=2$，不可标号；(v_1,v_2) 上，$f_{21}>0$，可标号；

则 v_2 标号 $(-v_1,l(v_2))$，$l(v_2)=\min\left[l(v_1),f_{21})\right]=\min\left[4,1\right]=1$。

检查 v_2：(v_2,v_4) 上，$c_{24}>f_{24}$，可以标号，

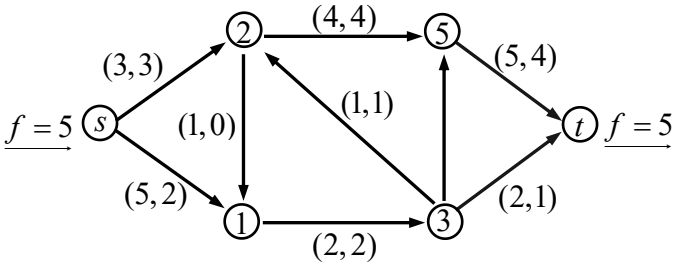
v_4 标号为 $(v_2,l(v_4))$，$l(v_4)=\min\left[l(v_2),c_{24}-f_{24})\right]=\min\left[1,1\right]=1$。

检查 v_4：(v_4,v_t) 上，$c_{4t}>f_{4t}$，可以标号，

v_t 标号为 $(v_4,l(v_t))$，$l(v_t)=\min\left[l(v_4),c_{4t}-f_{4t})\right]=\min\left[1,2\right]=1$。

最大流为 5，最小截集为 $(v_s,v_2),(v_1,v_3)$，截量为 5。

变换后：



微信扫一扫　4 小时速成课程

课时九　练习题

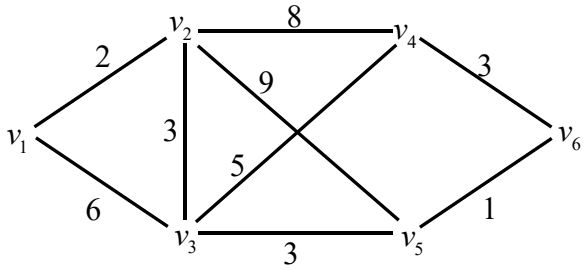
1. 树图一定是连通图（　　）。

2. 求最小生成树，常用的方法有_____和_____。

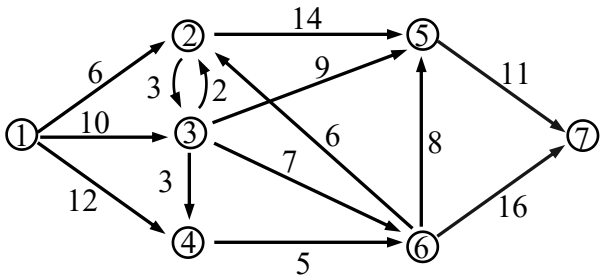
3. 在增广链中，所有的前向弧都是_____，所有的后向弧都是_____。

4. 电信公司要在6个城市之间铺设光缆，这些城市的位置及相互之间的铺设光缆的费用如下图所示，试求一个连接6个城市的铺设方案，使得总费用最小。

5. 下图中的权ω_n为从v_i到v_j的距离（费用、时间），从v_1修一条路到v_7，如何选择一条路使得距离最短。

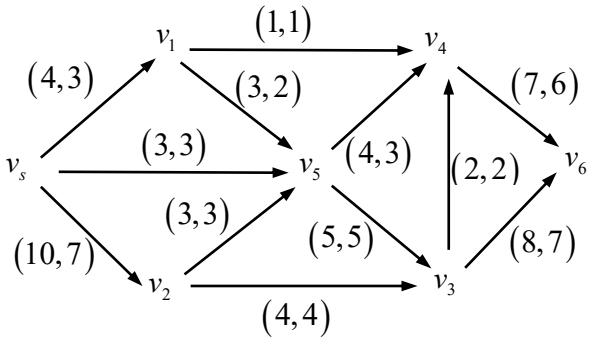


题4图



题5图

6. 求下列网络中v_s到v_t的最大流，并给出一个最小截集。



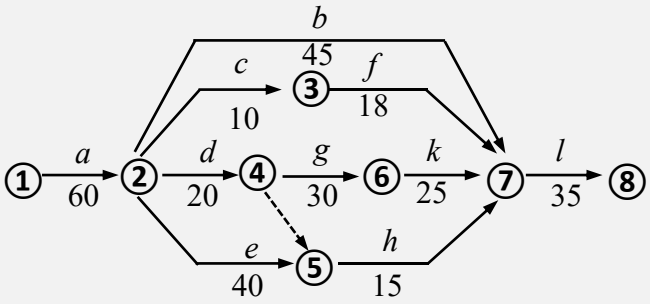
微信扫一扫　4小时速成课程

课时十　网络计划技术

考点	重要程度	占分	常见题型
1. 网络计划图绘制	★★★★	10～20	大题
2. 时间参数计算			

1. 网络计划图绘制

网络计划图的绘制规则：



1) 从左向右绘制,只有一个起点和终点；箭尾节点编号＜箭头节点编号；

2) 相邻两节点仅有一条箭线，图中不能有缺口和回路；

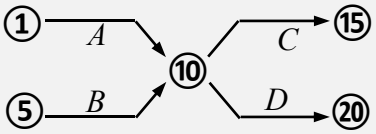
3）常见工序的概念

- 紧前工序：排在本工序之前，且完成紧前工序后才能开始本工序。
- 紧后工序：排在本工序之后，且本工序完成后才能开始。
- 虚工序：不占时间、资金等资源，只表示相邻工序间的逻辑关系。

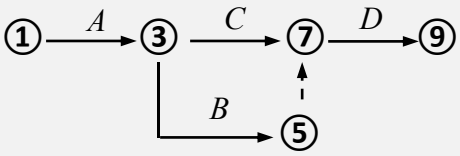
网络图中常见的逻辑关系：

1）A 完成后 B 才能开始

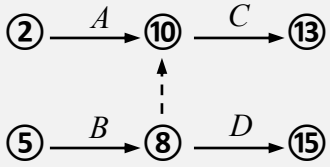
2）A、B 均完成后，C、D 才能开始



3）A 完成后，B、C 才能开始，B、C 完成后，D 才能开始



4）A、B 完成后，C 才能开始，B 完成后，D 才能开始



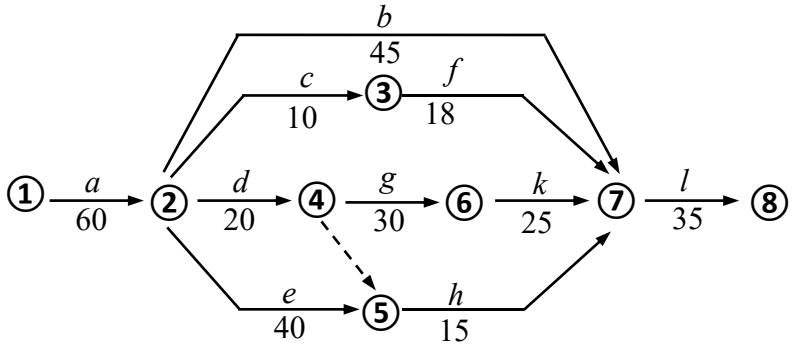
微信扫一扫　4 小时速成课程

题 1. 开发一个新产品，需要完成各个工序与所需时间及它们的相互逻辑关系如表所示：

工序	工序代号	所需时间（天）	紧后工序
产品设计与工艺设计	a	60	$bcde$
外购配套件	b	45	l
下料锻件	c	10	f
工装制造	d	20	gh
木模铸件	e	40	h
机械加工1	f	18	l
工装制造2	g	30	k
机械加工2	h	15	l
机械加工3	k	25	l
装配调试	l	35	–

绘制网络计划图并确定关键路线。

解：



① $\xrightarrow[60]{a}$ ② $\xrightarrow[20]{d}$ ④ $\xrightarrow[30]{g}$ ⑤ $\xrightarrow[25]{h}$ ⑦ $\xrightarrow[35]{l}$ ⑧　　170天

① $\xrightarrow[60]{a}$ ② $\xrightarrow[45]{b}$ ⑦ $\xrightarrow[35]{l}$ ⑧　　140天

① $\xrightarrow[60]{a}$ ② $\xrightarrow[10]{c}$ ③ $\xrightarrow[18]{f}$ ⑦ $\xrightarrow[35]{l}$ ⑧　　123天

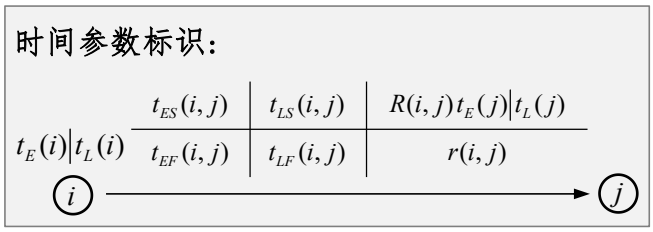
① $\xrightarrow[60]{a}$ ② $\xrightarrow[40]{e}$ ⑤ $\xrightarrow[15]{h}$ ⑦ $\xrightarrow[35]{l}$ ⑧　　150天

关键路线为：① $\xrightarrow[60]{a}$ ② $\xrightarrow[20]{d}$ ④ $\xrightarrow[30]{g}$ ⑥ $\xrightarrow[25]{k}$ ⑦ $\xrightarrow[35]{l}$ ⑧　　170天

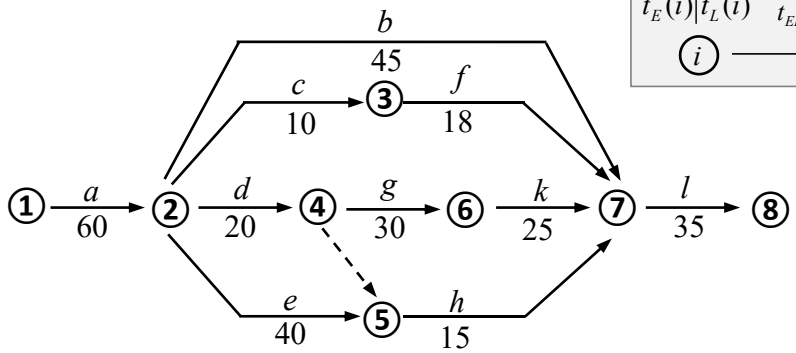
微信扫一扫　4 小时速成课程

2. 时间参数计算

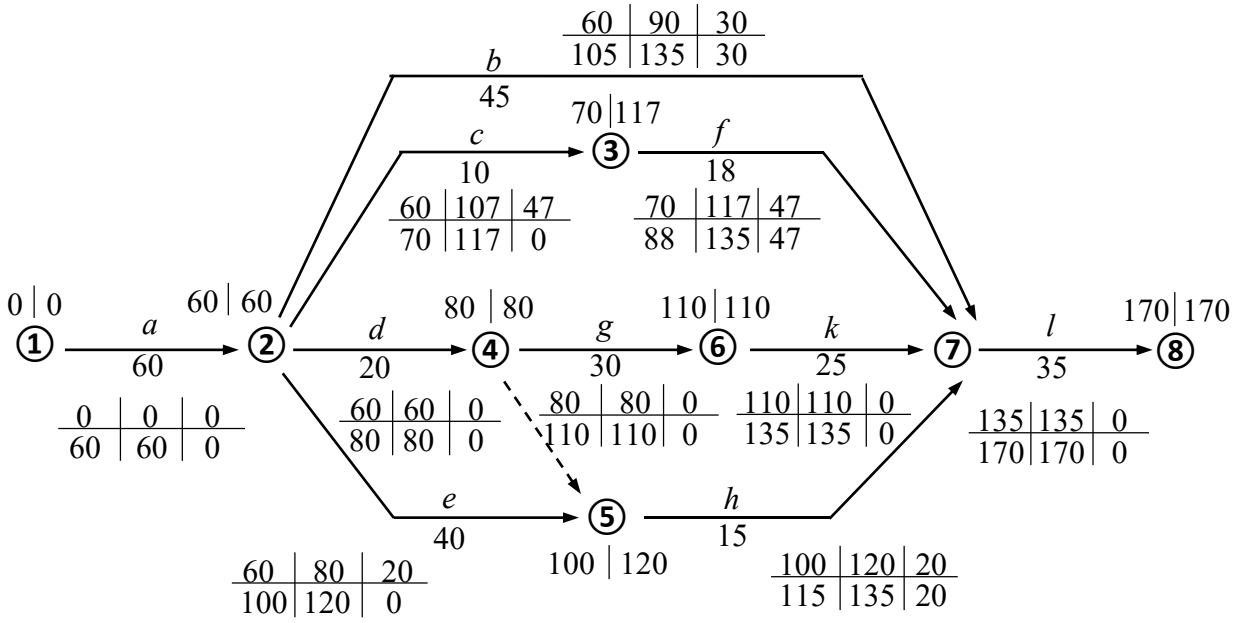
时间参数标识：



题 1. 计算下图网络图的时间参数：



解：



微信扫一扫　4 小时速成课程

课时十　练习题

1. 已知网络计划资料如表所示：

工作名称	A	B	C	D	E	F
紧后工作	B,C	D	E	F	F	–
持续时间	7	8	6	12	9	6

求：1）绘制双代号网络计划图；2）若计划工期等于计算工期，计算各项工作的六个时间参数；3）确定关键线路和关键工作。

2. 某网络计划的有关资料如表所示：

工作	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
持续时间	2	3	5	2	3	3	2	3	6	2
紧前工作	–	A	A	B	B	D	F	E、F	C、E、F	G、H

试绘制双代号网络图，并判定关键线路，计算各项工作的时间参数。

微信扫一扫　4 小时速成课程

课时十一　决策论

考点	重要程度	占分	常见题型
1. 不确定型决策	★★★★★	0～15	大题
2. 风险型决策			

1. 不确定型决策

题 1. 某公司为经营业务需要，决定要在现有生产情况下生产一种新产品。现有不同型号产品Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ对应 A,B,C,D 四种生产方案，产品的市场需求有大 (s_1)、中 (s_2)、小 (s_3) 3 种状态。三种状态出现情况无法预测，效益如下表：

	需求量大 (s_1)	需求量中 (s_2)	需求量小 (s_3)
A. 生产Ⅰ	800	320	–250
B. 生产Ⅱ	600	300	–200
C. 生产Ⅲ	300	150	50
D. 生产Ⅳ	400	250	100

1）用悲观主义准则决策生产哪种产品；2）用乐观主义准则决策生产哪种产品；3）用最小后悔值准则决策生产哪种产品；4）用等可能性准则决策生产哪种产品；5）用乐观系数法（假设乐观系数为 0.3）决策生产哪种产品。

解:1）悲观主义准则（小中取大法）

	s_1	s_2	s_3	min	max
A. 生产Ⅰ	800	320	–250	–250	
B. 生产Ⅱ	600	300	–200	–200	
C. 生产Ⅲ	300	150	50	50	
D. 生产Ⅳ	400	250	100	100	100

生产第Ⅳ种产品

2）乐观主义准则（大中取大法）

	s_1	s_2	s_3	max	max
A. 生产Ⅰ	800	320	–250	800	800
B. 生产Ⅱ	600	300	–200	600	
C. 生产Ⅲ	300	150	50	300	
D. 生产Ⅳ	400	250	100	400	

生产第Ⅰ种产品

微信扫一扫　4 小时速成课程

3）用最小后悔值准则，后悔矩阵：

	s_1	s_2	s_3	max	min
A. 生产Ⅰ	0	0	350	350	
B. 生产Ⅱ	200	20	300	300	300
C. 生产Ⅲ	500	170	50	500	
D. 生产Ⅳ	400	70	0	400	

生产第Ⅱ种产品

4）等可能性准则

	s_1	s_2	s_3	平均收益	max
A. 生产Ⅰ	800	320	–250	290	290
B. 生产Ⅱ	600	300	–200	700/3	
C. 生产Ⅲ	300	150	50	500/3	
D. 生产Ⅳ	400	250	100	250	

生产第Ⅰ种产品

5）乐观系数法

	s_1	s_2	s_3	0.3	0.7	加权平均	max
A. 生产Ⅰ	800	320	–250	800	–250	65	
B. 生产Ⅱ	600	300	–200	600	–200	40	
C. 生产Ⅲ	300	150	50	300	50	125	
D. 生产Ⅳ	400	250	100	400	100	190	190

生产第Ⅳ种产品

微信扫一扫　4 小时速成课程

2. 风险型决策

题 1. 某公司为经营业务需要，决定要在现有生产情况下生产一种新产品。现有不同型号产品Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ对应 A,B,C,D 四种生产方案，产品的市场需求有大 (s_1)、中 (s_2)、小 (s_3) 3 种状态。三种状态出现概率、效益如下表：

	需求量大 (s_1)：$p_1=0.3$	需求量中 (s_2)：$p_2=0.4$	需求量小 (s_3)：$p_3=0.3$
A. 生产Ⅰ	800	320	–250
B. 生产Ⅱ	600	300	–200
C. 生产Ⅲ	300	150	50
D. 生产Ⅳ	400	250	100

解：1) 最大期望效益值准则

	s_1：$p_1=0.3$	s_2：$p_2=0.4$	s_3：$p_3=0.3$	期望收益	max
A. 生产Ⅰ	800	320	–250	293	293
B. 生产Ⅱ	600	300	–200	240	
C. 生产Ⅲ	300	150	50	165	
D. 生产Ⅳ	400	250	100	250	

生产第种Ⅰ产品

2) 最小期望后悔值准则

	s_1：$p_1=0.3$	s_2：$p_2=0.4$	s_3：$p_3=0.3$	期望后悔值	min
A. 生产Ⅰ	0	0	350	105	105
B. 生产Ⅱ	200	20	300	158	
C. 生产Ⅲ	500	170	50	233	
D. 生产Ⅳ	400	70	0	148	

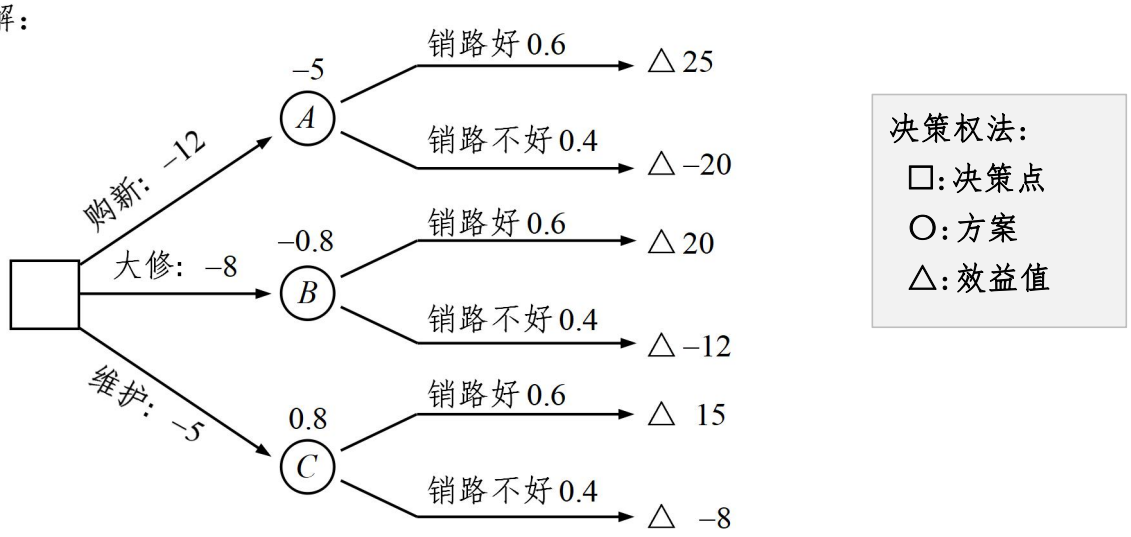
生产第种Ⅰ产品

题 2. 某厂决定生产某种产品，要对机器进行升级改造，投入不同数额的资金进行改造，有三种方案：购买新机，大修和维护。根据经验，销路好发生的概率为 0.6，不同方案效益值如下表，请选择效益最大的方案。

	投资额	销路好 $p_1=0.6$	销路不好 $p_2=0.4$
A：购买新机	12	25	–20
B：大修	8	20	–12
C：维护	5	15	–8

微信扫一扫　4 小时速成课程

解：



$E(A)=0.6\times25+0.4\times(-20)-12=-5$　　$E(B)=0.6\times20+(-12)\times0.4-8=-0.8$

$E(C)=0.6\times15+0.4\times(-8)-5=0.8$，最大值为 $E(C)=0.8$，故选择维护方案

课时十一　练习题

1. 某公司拟定扩大再生产的三种方案，未来市场需求状态为：无需求 E_1，低需求 E_2，中需求 E_3 和高需求 E_4，每个方案在四种自然状态的收益如表所示（单位：万元）：

收益 自然状态 / 方案	E_1	E_2	E_3	E_4
s_1	−130	−65	70	160
s_2	−40	−5	45	100
s_3	−95	−50	60	120

试分别依据以下决策准则选择扩大再生产的方案：1）悲观准则；2）乐观准则；3）折衷准则；4）后悔值准则；5）等可能准则。

2. 为了适应市场的需要，某地提出了扩大电视机生产的两个方案，第一个方案是建大厂，第二个方案是建小厂：1）建设大工厂投资600万元，可使用10年，销路好，每年获利200万元，销路不好则亏损40万元。2）建设小工厂投资280万元，如销路好，每年获利80万元，3年后扩建，扩建投资400万元，可使用7年，每年获利190万元，销路不好则每年获利60万元。试用决策树法选出合理的决策方案，经过市场调查，销路好的概率为0.7，销路不好的概率为0.3。

微信扩一扩　4 小时速成课程